Geometrisk morfologi

-

forvandlinger av en kjeglesnittype

Morten Eide

9. mai 2015

Innhold

Del I

Bakgrunn

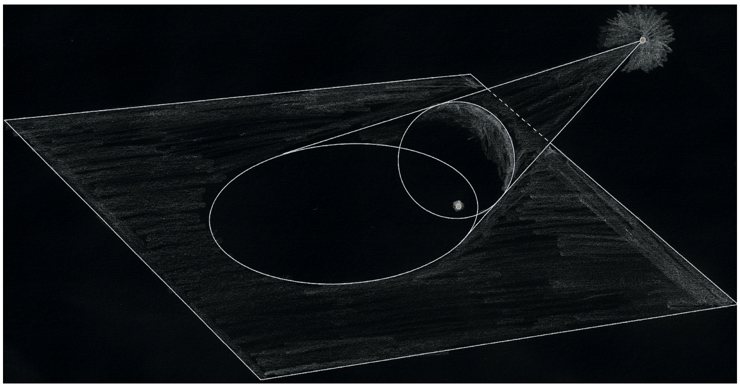
Klassisk kjeglesnittlære

Kjeglesnittene og læren om disse inntar en helt spesiell plass i utviklingen av geometri overhodet. De danner på et vis broen fra den helt elementære geometri den den høyere. Dette viser seg allerede i det faktum at kjeglesnitt er et generelt begrep, det opptrer på ulike måter i ulike skikkelser, og kan som sådan bare oppfattes som enhetlig rent ideelt. De løfter seg dermed ut av den rene sanselige konstruktive geometri henimot å fatte noe ideelt.

Det ligger noe særegent allerede i måten hvordan kjeglesnittene ble oppfattet helt fra begynnelsen av, både i bilder vi bruker, og i benevneslen. Kjeglesnitt betyr jo snitt av en kjegle, og betrakter vi kjeglen som enhetlig, så oppstår kjeglesnittene ved at denne blir oppdelt på ulike vis. Vi ser også i bildet en direkte variant av Platons hulelignelse. Kjeglesnittene i sin mangfoldighet er skygger av noe enhetlig som forbinder dem i en ide. Vi fristes også å gå til Kepler og hvordan han forestiller seg forholdet mellom Gud og skapningen. Han ser kulen som et bilde av gud, mens han ser sirkelen som skapningen, som dannes som et snitt mellom kulen og et plan. Sirkelen er jo kjeglesnittenes urbilde så og si, slik at kjeglesnittene i enda høyere grad et bilde på det mangfoldig skapte.

Denne mangfoldigheten viser seg i enda høyere grad ved at kjeglesnittenen inngår i utallige relasjoner med andre elementer, det kan være elementer som kommer til utenfra så og si, slik som tangenter og korder, eller det er elementer som synes å høre til kjeglesnittene, slik som akser, diametre og brennpunkter. Disse relasjoner, egenskaper og lovmessigheter er *materialet* for de morfologiske undersøkelsene som følger, og fordi disse er mer eller mindre kjente idag, vil vi går gjennom de grunnleggende forhold og egenskaper som gjelder.

De fleste av disse relasjonene slik de foreligger fra den klassiske kjeglesnittlæren er geometrisk-metriske relasjoner, men som vi har sett tidligere kan vi ved kombinatoriske operasjoner danne insidensrelasjoner av disse. I denne gjennomgangen vil vi ikke foreta disse omdannelsene, det vil vi se på etterhvert som vi støter på ting i selve morfologien.



Figur 1: Ellipsen som bilde av kulen

Oppdagelsen av kjeglesnittene

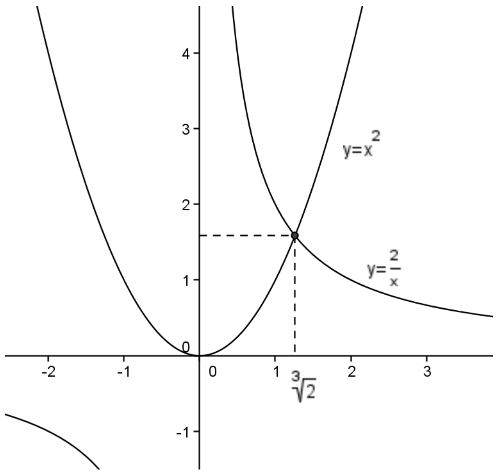
Kjenneskapet til kjeglesnittene ligninger spores tilbake til problemet med Kubens fordobling, et av disse merkverdige Delfiske problemene som bidro så mye til utviklingen av matematikken.[1] Her er oppgaven å konstruere et kubisk alter som har det dobbelte volum av et annet kubisk alter. Dette viste seg å være problematisk med bare passer og linjal, fordi det innebærer å konstruere et linjestykke som er $\sqrt[3]{2}$ større enn et annet, noe som først i vår tid har vist er umulig.

Grekeren Menaechmus har fått æren av å ha oppdaget at kjeglesnittene kan anvendes til dette, og han gir to løsninger av problemet ved disse. I det ene tilfellet benytter han to parabler, i det andre tilfellet en parabel og en hyperbel. Han benytter seg av tallforhold knyttet til disse kurvene, og ved å løse ligninger med to ukjente finner han den søkte størrelse.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= \frac{2}{x} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{2}{x} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Ut fra sitater fremgår det også at han kjenner til at disse kurvene er dannet ut fra snitt med en kjegle. De ulike kjeglesnittene fremkommer nemlig som ulike resultat av et plan som skærer over en kjegle. Skjærer vi over slik

[1]De to andre problemene: Å tredele en vinkel med passer og linjal alene; Å konstruere et linjestykke som er like langt som en sirkels omkrets når vi kjenner diameter.



Figur 2: Kubens fordobling

at vi får et endelig snitt fremkommer ellipsen, skjærer vi slik at planet er parallellt med en kant i kjeglen oppstår parabelen, og skjærer vi slik at planet ikke er parallellt, men heller ikke endelig, oppstår hyperbelen. Vi ser hvordan disse fremkommer på figur 14. Dermed trer de to aspektene ved kjeglsnittene i dagen helt fra begynnelsen, på den ene siden den rent geometriske, og på den andre siden algebraiske forhold knyttet til.

I det videre studiet av kjeglesnittene deltar en hel rekke matematikere i oldtiden; Euklid, Arkimedes, Pappos og fremfor alt Appolonius. Her er ikke stedet for å redegjøre nøyaktig for hvordan alle resultatene resultatene fremkommer, vi gir en skisse og viser noen momenter i måten å arbeide på.

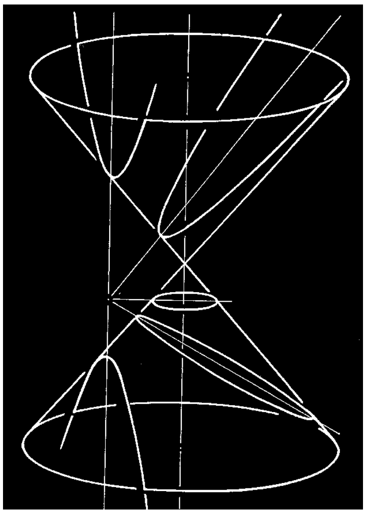
For å få en viss forståelse av denne vei kan vi se hvordan liningen for parabelen fremkommer ut fra betraktning av knitt med en kjegle.

Ligningene for kjeglesnittene

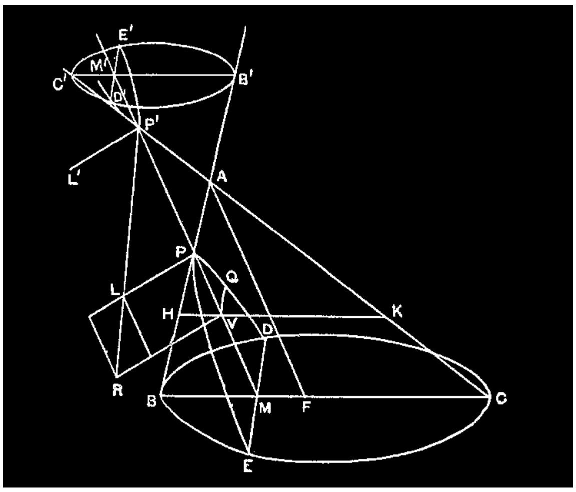
Kjeglesnittene fremkommer altså på enkleste måte ved at man skjærer over en kjegle med et plan. Appolonius betraktet disse snittene, og han viser hvordan ligningene for de ulike variantene fremkommer av dette. Vi skal ikke gå gjennom denne metodikk systematisk, men for at vi skal ha en viss følelse for utgangspunktet for det hele, vil vi se på hvordan parabelligningen fremkommer i det enkleste tilfelle.

Setning 1. *Ligningen til parabelen er gitt ved* $y = a\,x^2$.

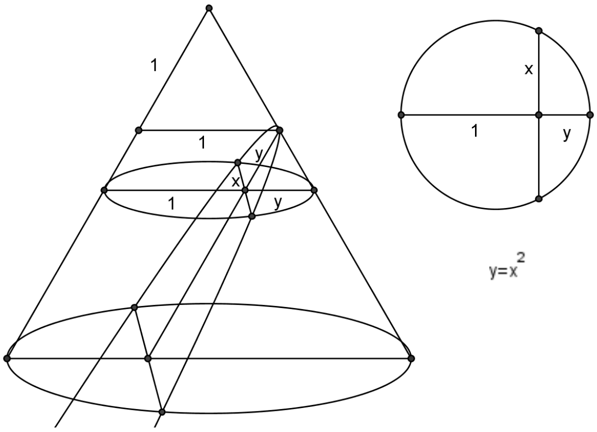
Redegjrøresle: Vi tar utgangspunkt i en kjegle som sett fra siden danner



Figur 3: Snitt av en kjegle



Figur 4: Apollonius undersøkelser



Figur 5: Ligning for parabel fra snitt

en likesidet trekant, og vi begynner snittet med enheten fra toppen slik vi ser på figur **??**. Når parabelen fremkommer ved at et plan skjærer parallellt med en side, medfører det at aksen til parabelen hele tiden er like langt fra denne side. Vi gjør så et snitt normalt på aksen i kjeglen; disse snittene blir sirkler, og ved å følge hvordan sirkelen endrer seg i forhold til forholdene på parabelen fremkommer parabelligningen. Detaljene i dette overlates leseren.

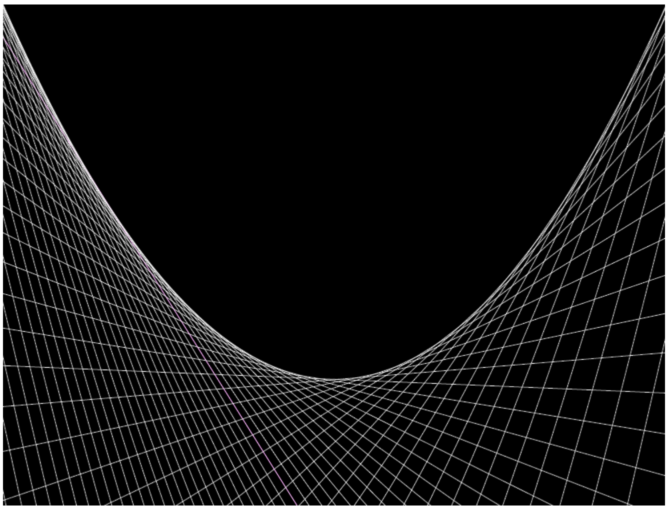
Pålignende måte kan vi få frem ligninger for hyprebelen og ellipsen ved å se på de andre snittene. Vi skal imidlertid se på andre egenskaper ved disse ligningene for å få frem ligningene til dissse. Ellipsen fremkommer enklest når vi ser på den som en sirkel i perpektiv, og dette gir også ligningen på en enkel måte. Den enkleste fremstillingen av dette har vi ved at en sirkel så og si blir trykt sammen. Da vil alle høydene i sirkelen reduseres like mye, og ut fra dette gies ligningen for ellipsen ut fra ligningen til sirkelen.

Setning 2. *Ligningen til en ellipse med senter i origo, og med koordinataksene som akser er gitt ved*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Bevis: Vi betrakter denne i forhold til sirkelligningen $x^2 + y^2 = r^2$, og ligningne fremkommer. En ellipse har dermed to symmetriaker, og et senter. Det samme gjelder hyperbelen, men denne fremkommer ikke direkte som en sammentrykt sirkel. Et annet forhold gir en ligning til denne, som i første omgang ser ganske annerledes ut enn ellipseligningen. Ligningen er da gitt ved

$$y = \frac{a}{x}$$



Figur 6: Omhyllet parabel

. Dette kan også beskrives som at den er kurven som gir samme areal. Ligningen over kan overføres til samme type som ellipsen ved å dreie koordiantaksene. Vi setter erstatter da x og y i proddukt ligningen ved å sette $x + y$ og $x - y$. Da fremkommer hyperbligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a er den reelle aksen, og b er den imaginære aksen.

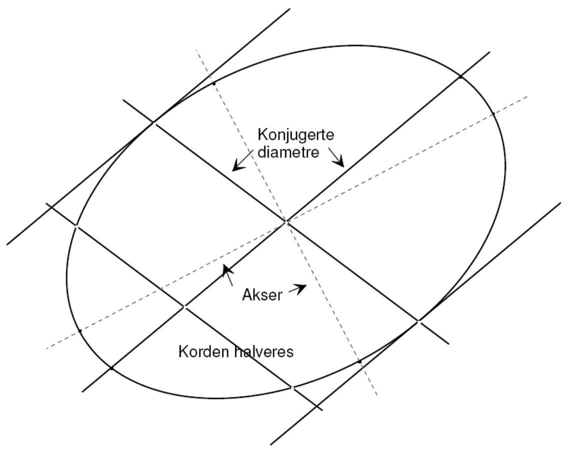
Den generelle ligningen for alle kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$a\ x^2 + b\ y^2 + c\ xy + d`\ x + e\ y + f == 0$$

Vi ser nå på mer spesifikke forhold.

Diametre og senter

Sentrale elementer i kjeglesnittlæren er *senteret* og *diametre* i kjeglesnitt, og til disse er knyttet mange egenskaper. Når senteret er gitt er diametre linjer gjennom dette senteret begrenset av kjeglesnittet. Er kjeglesnittet gitt ved periferien bestemmes derimot diameteren først, og senteret bestemmes som skjæringspunktene mellom diametrene. Diametrene fremkommer nemlig på en enkel måte, knyttet til en sentral lovmessighet. Trekker vi en rekke parallelle linjer over et kjeglesnitt og halverer kordene som fremkommer,



Figur 7: Konjugerte diametre og akser

viser det seg at alle halveringspunktene ligger på samme linje. Denne linjen er en diameter til kjeglesnittet.

Setning 3. *Gitt et kjeglensnitt, og en rekke parallelle linjer som skjærer over dette. Haveringspunktene til kordene vil da ligge på samme linje. Denne linjen kaller vi en* diameter *til kjeglesnittet.*

Det viser seg videre at alle diametrene som dannes på denne måten møtes i samme punkt.

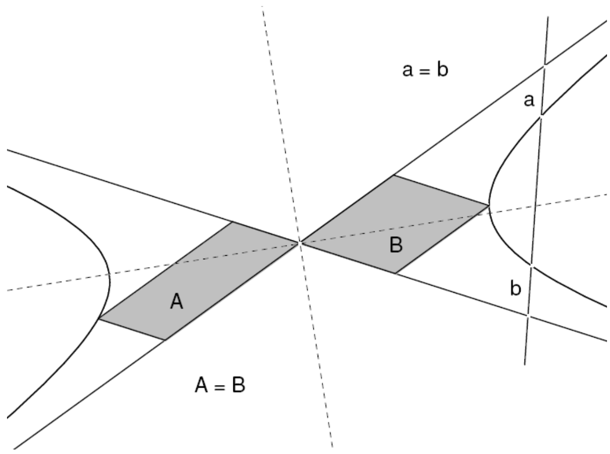
Setning 4. *Alle diametrene til et kjeglesnitt møtes i sammme punkt som vi kaller* senteret *til kjeglensnittet.*

Har vi gitt et kjeglesnitt ved dens periferi, kan vi ved disse egenskapene konstruere diametre og senter i et kjeglesnitt.

Ut fra en rekke parallelle linjer finner vi altså en diameter. Nå finnes det linjer blandt de parallelle som skiller seg ut. Den ene av disse er den linjen som også går gjennom senteret til kjeglesnittet, og denne kalles den *konjugerte diameteren* til den som blir funnet.

De andre linjene som skiller seg ut blandt de parallelle er *tangentene* til kjeglensittet. En diameter er dermed en konjugert diameter til en annen når den går gjennom punktene som parallelle tangenter danner med kjeglesnittet.

Blandt diametrene er det to som skiller seg ut, og det er den lengste og den kortenst diameteren. Disse kalles *aksene* til kjeglesnittet, og vi vil her kalle disse *langaksen* og *kortaksen.* Disse kan vi finne ved å slå en sirkel om senteret til ellipsen, og der den skjærer denne, halverer vi, og vi får aksene. Kjeglesnittene er symmetriske om aksene.



Figur 8: Hyperbel og asymptoter

Hyperbelens og dens aymptoter

Noe særegent er knyttet til hyperbelen som vi ikke finner for de andre kjeglesnittene, nemlig dens *asymptoter*. Disse har vi allerede sett på, og de finnes som to spesielle diametre, og de er også konjugerte til hverandre.

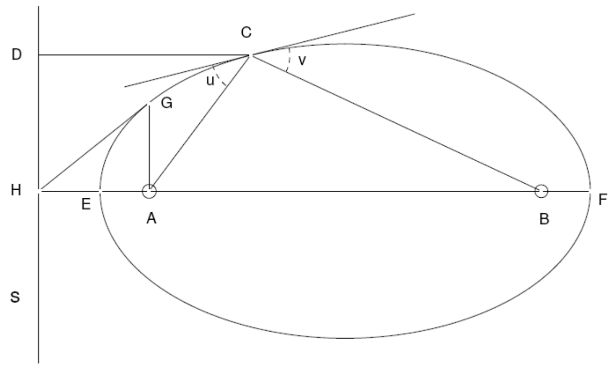
Setning 5. *Gitt to linjer. Vi finner punkter slik at produktet av avstandene fra punktet til asymtotene parallellt med de andre asymtotene er konstant. Da vil punktene danne en hyperbel.*

Brennpunkt

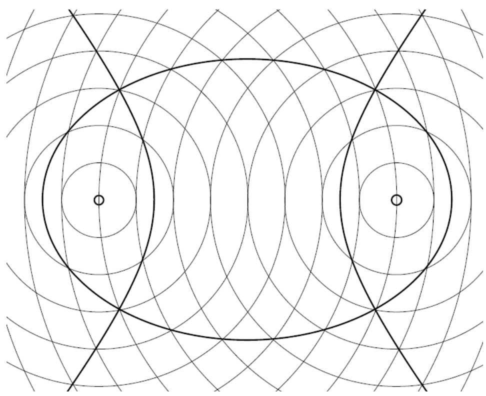
I tillegg til senteret finnes to sentrale punkter knyttet til kjeglesnittene, som i mange sammenhenger er av vel så stor betydning. Dette er brennpunktene til kjeglesnittene. Fenomenene som innebærer brennpunkter er også mangfoldige, og de har en annen karakter enn de vi har sett så langt. Dette skillet kan karakteriseres ved at de første fenomene innebærer parallelle linjer på en eller annen måte, mens fenomenene knyttet til brennpunkt innebærer sirkelen.

Den mest umiddelbare måte brennpunktene viser seg på er ved addisjonslovmessigheten.

Setning 6. ***Addisjonssetningen***
Gitt et en ellipse og de to brennpunktene. Da er summen av avstandene fra et punkt på en ellipsen til de to brennpunktene konstant, og summen er lik storaksen til ellipsen.



Figur 9: Egenskaper ved ellipsen



Figur 10: Ellipser og hyperbler fra kosntant sum og differanse

Denne sammenheng kan brukes som definisjon på ellipse, og konstruksjonsmessig får vi ellipsen til å fremtre ved å starte med to brennpunkter, og finne punkter som angitt over.

Definisjonen over gjelder bare ellisen, for de andre kjeglesnittene gjelder noe som egentlig er modifikasjoner, men som opptrer ganske annerledes. Hyperbelen fremkommer således ved en konstant differanse.

Setning 7. *Gitt et en hyperbel og de to brennpunktene. Da er differansen av avstandene fra et punkt på en hyperbelen til de to brennpunktene konstant, og summen er lik transversaksen til hyperbelen.*

Slik som for ellipsen kan vi få hyperbelen til å fremtre ut fra denne setning.

Brennpunkt og styrelinje

Når det gjelder parabelen inntrer enda noe særskilt. Denne har bare et brennpunkt, og vi kan betrakte den som en langstrakt ellipse der det ene brennpunktet har gått til uendelig. Dette fører til at setninger knyttet til to brennpunkter ikke gjelder for parabelen, men vi har en lovmessighet som vi siden skal vise står i umiddelbar forbindelse med de to over. Vi tar da utgangspunkt i brennpunktet, og en bestemt linje, den såkalte *styrelinjen* til parabelen.

Setning 8. *Gitt en parabel, brennpunktet og styrelinjen. For alle punkt på parabelen vil avstanden til styrelinjen være den samme som avstanden til brennpunktet.*

Denne setningen kan vi også anvende som definisjon, og til å konstruere en parabelen på en enkel måte. Det er relativt enkelt å finne parabelligningen fra denne sammenhengen.**??**

Styrelinje er ikke bare knyttet til parabelen, den er også kyttet til ellipse og hyperbel. For hver av disse er det knyttet en styrelinje til hvert brennpunkt. Men i realiteten er det ikke tale om fire elementer på en gang, men enten om to brennpunkt, eller et brennpunkt og den tilhørende styrelinje. Til det siste er knyttet en sentral lovmessighet, som gjelder alle kjeglesnittene.

Setning 9. ***Forholdssetningen***
Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt og den tilhørende styrelinje. Fra hvert punkt på kjeglesnittet er forholdet mellom avstandene til brennpunkt og styrelinje konstant.

Også denne setningen brukes som definisjon på kjeglesnitt. Fra denne kan kjeglesnitt konstrueres, og det er relativt enkelt å se overgangen til addisjonssetniingen og differenssetningen. Ved å variere konstanten fremkommer de ulike kjeglesnittenen; når den er mindre enn en har vi en ellipse, er den større enn en har vi hyperbelen, og er den lik en fremkommer parabelen. Vi ser at da fremkommer parabelsetningen ovenfor.

Omhylningskurver

Så langt har vi sett på punktfremkomster av kjeglesnittene knyttet til brennpunktene, men vi har også sammenhenger der tangenter er involvert. Mens vi når det gjelder punkter har med lengder å gjøre, trer her vinklegenskaper frem. En sentral setning, som også gir alle kjeglesnittene, er følgenede:

Setning 10. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt til dette, og en sirkel cosentrisk med dette, og diameter lik strorakse. Vi trekker en linje gjennom brennpunktet, og der denne skjærer sirkelen reiser vi en normal. Denne vil da være tangent til kjeglesnittet.*

Ved å starte med en sirkel og et punkt kan vi ut fra denne lovmessigheten konstruere kjeglesnittene. Vi trekker da linjer gjennom punktet, og der disse skjærer sirkelen, reiser vi normaler. Alle normalene vil da omhylle et kjeglesnitt, slik som vi ser av figur 22

Ved å variere sirkelen får vi frem en rekke kjeglesnitt. Starter vi med punktet inne i sirkelen fremkommer ellipsen. Vi holder så fast det punktet på sirkelperiferien som er nærmest brennpunktet, og lar sirkelen vokse. Vi får da en mer og mer langstrakt ellipse, og idet sirkelen blir en linje, oppstår parabelen. Når sirkelen igjen lukker seg i den andre retningen fremkommer hyperbelen. Vi har ved også ved dette en dynamisk forvandling av kjeglesnittene.

For parabelens del kan vi skrive opp setningen spesielt, fordi vi ikke lenger har å gjøre med sirkel, men med linje.

Setning 11. *Gitt en parabel, brennpunktet, aksen, og en normal til aksen der denne skjærer parabelen. Vi trekker en linje gjennom brennpunktet, og der denne skjærer normalen reiser vi en normal til linjen, og denne vil da være tangent til parabelen.*

Vi skal senere se at denne setningne har betydning i og for seg.

En sentral sammenheng, som også har praktisk betydning er en forbindelse mellom punkt og tangentperspektivet.

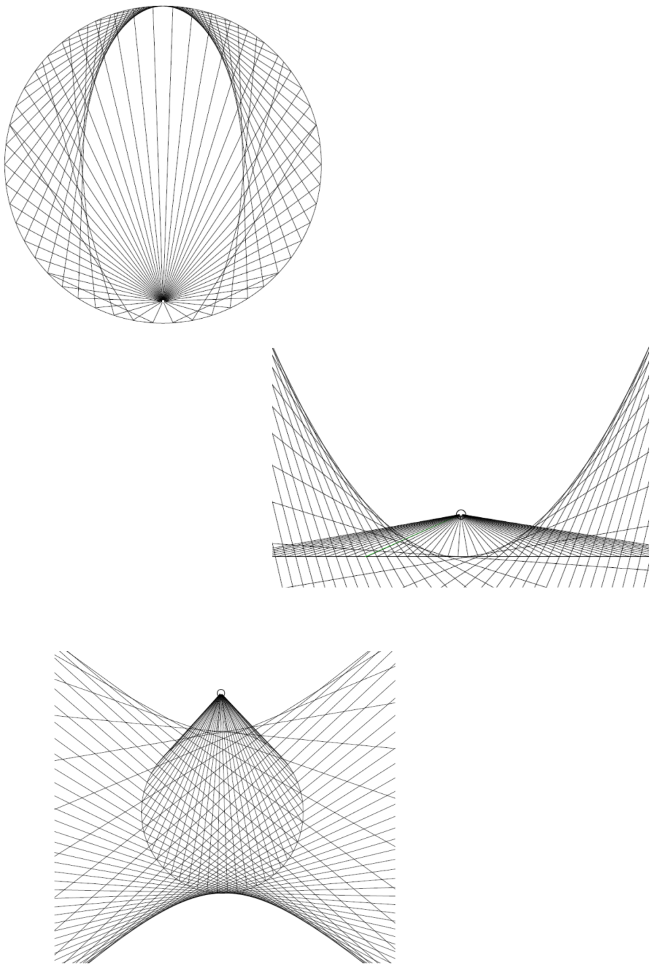
Setning 12. *Gitt et kjeglesnitt, dets to brennpunkter, og to linjer fra disse til et punkt på periferien. En tangent til kjeglesnittet i dette punktet vil da halvere vinkelen mellom de to linjene.*

Dette forhold innebærer at alt lys som utgår fra det ene brennpunktet i en ellipse, vil reflekteres via periferien til det andre brennpunktet.

Når det gjelder parabelen ligger det ene brennpunktet i uendelig, hvilket innbærer en modifikasjon av setningen over:

Setning 13. *Alle linjer parallelle med aksen i en parabel, vil reflekteres via periferien til brennpunktet.*

Parabolspeil og parabolantenner benytter dette prinsippet for å samle lys og radiosignaler.



Figur 11: Innhyllede kjeglesnitt

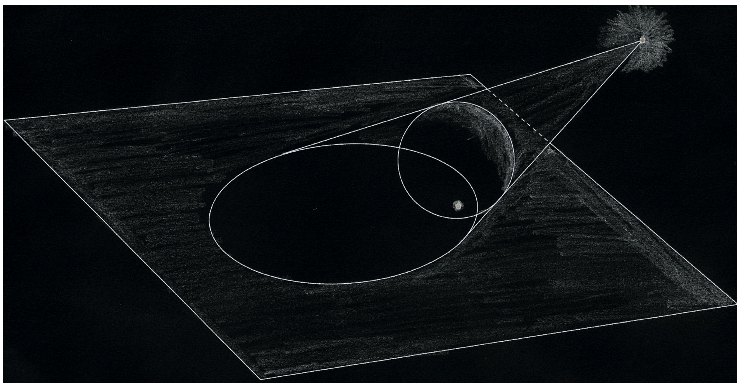
Klassisk kjeglesnittlære

1. Kjeglesnittene og læren om disse inntar en helt spesiell plass i utviklingen av geometri overhodet. De danner på et vis broen fra den helt elementære geometri den den høyere. Dette viser seg allerede i det faktum at kjeglesnitt er et generelt begrep, det opptrer på ulike måter i ulike skikkelser, og kan som sådan bare oppfattes som enhetlig rent ideelt. De løfter seg dermed ut av den rene sanselige konstruktive geometri henimot å fatte noe ideelt i tingene.

2. Det ligger noe særegent allerede i måten hvordan kjeglesnittene ble oppfattet helt fra begynnelsen av, både i bilder vi bruker, og i benevneslen. Kjeglesnitt betyr jo snitt av en kjegle, og betrakter vi kjeglen som enhetlig, så oppstår kjeglesnittene ved at denne blir oppdelt på ulike vis. Vi ser også i bildet en direkte variant av Platons hulelignelse. Kjeglesnittene i sin mangfoldighet er skygger av noe enhetlig som forbinder dem i en ide. Vi fristes også å gå til Kepler og hvordan han forestiller seg forholdet mellom Gud og skapningen. Han ser kulen som et bilde av gud, mens han ser sirkelen som skapningen, som dannes som et snitt mellom kulen og et plan. Sirkelen er jo kjeglesnittenes urbilde så og si, slik at kjeglesnittene i enda høyere grad et bilde på det mangfoldig skapte.

3. Denne mangfoldigheten viser seg i enda høyere grad ved at kjeglesnittenen inngår i utallige relasjoner med andre elementer, det kan være elementer som kommer til utenfra så og si, slik som tangenter og korder, eller det er elementer som synes å høre til kjeglesnittene, slik som akser, diametre og brennpunkter. Disse relasjoner, egenskaper og lovmessigheter er *materialet* for de morfologiske undersøkelsene som følger, og fordi disse er mer eller mindre kjente idag, vil vi går gjennom de grunnleggende forhold og egenskaper som gjelder.

4. De fleste av disse relasjonene slik de foreligger fra den klassiske kjeglesnittlæren er geometrisk-metriske relasjoner, men som vi har sett tidligere kan vi ved kombinatoriske operasjoner danne insidensrelasjoner av disse. I denne gjennomgangen vil vi ikke foreta disse omdannelsene, det vil vi se på etterhvert som vi støter på ting i selve morfologien.



Figur 12: Ellipsen som bilde av kulen

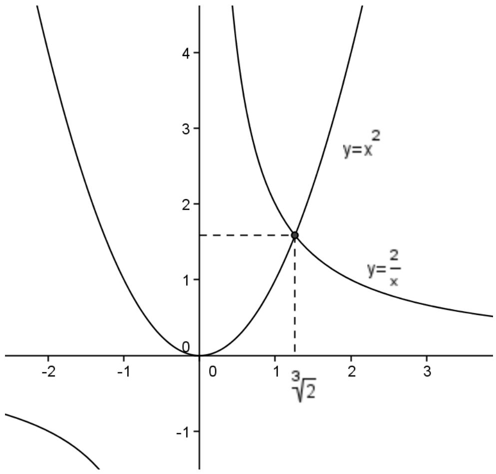
Oppdagelsen av kjeglesnittene

5. Kjenneskapet til kjeglesnittene ligninger spores tilbake til problemet med Kubens fordobling, et av disse merkverdige Delfiske problemene som bidro så mye til utviklingen av matematikken.[2] Her er oppgaven å konstruere et kubisk alter som har det dobbelte volum av et annet kubisk alter. Dette viste seg å være problematisk med bare passer og linjal, fordi det innebærer å konstruere et linjestykke som er $\sqrt[3]{2}$ større enn et annet, noe som først i vår tid har vist er umulig.

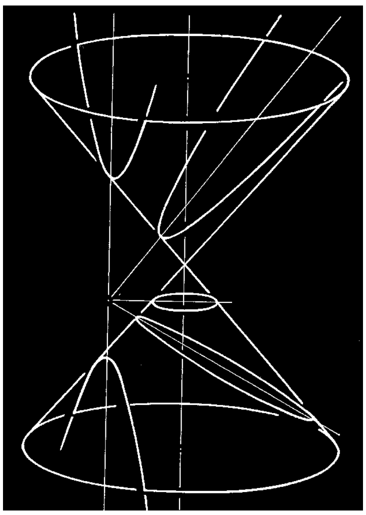
6. Grekeren Menaechmus har fått æren av å ha oppdaget at kjeglesnittene kan anvendes til dette, og han gir to løsninger av problemet ved disse. I det ene tilfellet benytter han to parabler, i det andre tilfellet en parabel og en hyperbel. Han benytter seg av tallforhold knyttet til disse kurvene, og ved å løse ligninger med to ukjente finner han den søkte størrelse.

7. Ut fra sitater fremgår det også at han kjenner til at disse kurvene er dannet ut fra snitt med en kjegle. De ulike kjeglesnittene fremkommer nemlig som ulike resultat av et plan som skærer over en kjegle. Skjærer vi over slik at vi får et endelig snitt fremkommer ellipsen, skjærer vi slik at planet er parallellt med en kant i kjeglen oppstår parabelen, og skjærer vi slik at planet ikke er parallellt, men heller ikke endelig, oppstår hyperbelen. Vi ser hvordan disse fremkommer på figur 14. Dermed trer de to aspektene ved kjeglsnittene i dagen helt fra begynnelsen, på den ene siden den rent geometriske, og på den andre siden algebraiske forhold knyttet til.

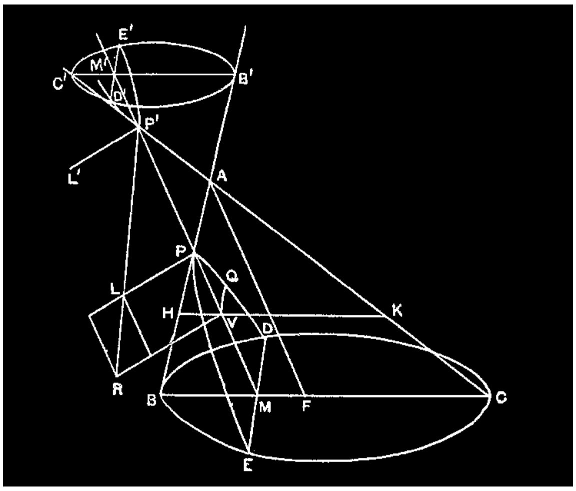
[2] De to andre problemene: Å tredele en vinkel med passer og linjal alene; Å konstruere et linjestykke som er like langt som en sirkels omkrets når vi kjenner diameter.



Figur 13: Kubens fordobling



Figur 14: Snitt av en kjegle



Figur 15: Apollonius undersøkelser

8. I det videre studiet av kjeglesnittene deltar en hel rekke matematikere i oldtiden; Euklid, Arkimedes, Pappos og fremfor alt Appolonius. Her er ikke stedet for å redegjøre nøyaktig for hvordan alle resultatene resultatene fremkommer, vi gir en skisse og viser noen momenter i måten å arbeide på. Hovedpoenget her er å får frem ulike sider med tanke på senere behandling.

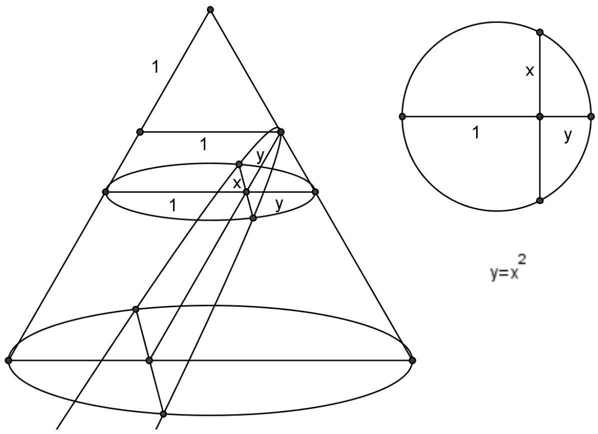
9. For å få en viss forståelse av denne vei kan vi se hvordan liningen for parabelen fremkommer ut fra betraktning av knitt med en kjegle.

Ligningene for kjeglesnittene

10. Kjeglesnittene fremkommer altså på enkleste måte ved at man skjærer over en kjegle med et plan. Appolonius betraktet disse snittene, og han viser hvordan ligningene for de ulike variantene fremkommer av dette. Vi skal ikke gå gjennom denne metodikk systematisk, men for at vi skal ha en viss følelse for utgangspunktet for det hele, vil vi se på hvordan parabelligningen fremkommer i det enkleste tilfelle.

Setning 14. *Ligningen til parabelen er gitt ved* $y = a\,x^2$.

Redegjrøresle: Vi tar utgangspunkt i en kjegle som sett fra siden danner en likesidet trekant, og vi begynner snittet med enheten fra toppen slik vi ser på figur **??**. Når parabelen fremkommer ved at et plan skjærer parallellt med en side, medfører det at aksen til parabelen hele tiden er like langt fra



Figur 16: Ligning for parabel fra snitt

denne side. Vi gjør så et snitt normalt på aksen i kjeglen; disse snittene blir sirkler, og ved å følge hvordan sirkelen endrer seg i forhold til forholdene på parabelen fremkommer parabelligningen. Detaljene i dette overlates leseren.

Pålignende måte kan vi få frem ligninger for hyprebelen og ellipsen ved å se på de andre snittene. Vi skal imidlertid se på andre egenskaper ved disse ligningene for å få frem ligningene til dissse.

11. Ellipsen fremkommer enklest når vi ser på den som en sirkel i perpektiv, og dette gir også ligningen på en enkel måte. Den enkleste fremstillingen av dette har vi ved at en sirkel så og si blir trykt sammen. Da vil alle høydene i sirkelen reduseres like mye, og ut fra dette gies ligningen for ellipsen ut fra ligningen til sirkelen.

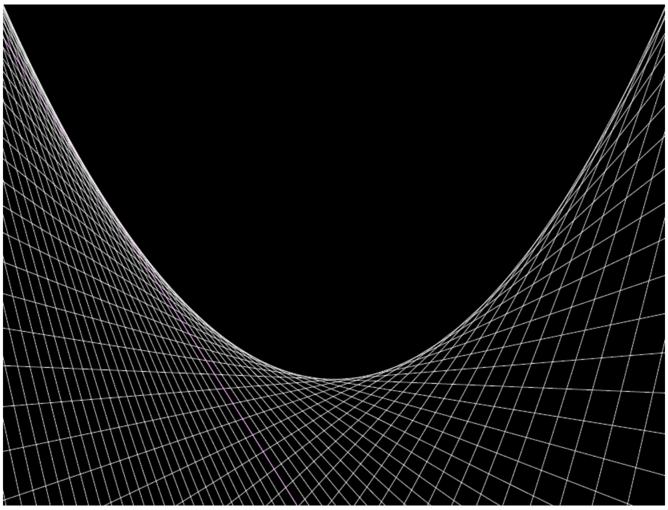
Setning 15. *Ligningen til en ellipse med senter i origo, og med koordinataksene som akser er gitt ved*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

Bevis: Vi betrakter denne i forhold til sirkelligningen $x^2 + y^2 = r^2$, og ligningne fremkommer.

12. En ellipse har dermed to symmetriaker, og et senter. Det samme gjelder hyperbelen, men denne fremkommer ikke direkte som en sammentrykt sirkel. Et annet forhold gir en ligning til denne, som i første omgang ser ganske annerledes ut enn ellipseligningen. Ligningen er da gitt ved

$$y = \frac{a}{x}$$



Figur 17: Omhyllet parabel

. Dette kan også beskrives som at den er kurven som gir samme areal.

13. Ligningen over kan overføres til samme type som ellipsen ved å dreie koordiantaksene. Vi setter erstatter da x og y i proddukt ligningen ved å sette $x + y$ og $x - y$. Da fremkommer hyperbligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a er den reelle aksen, og b er den imaginære aksen.

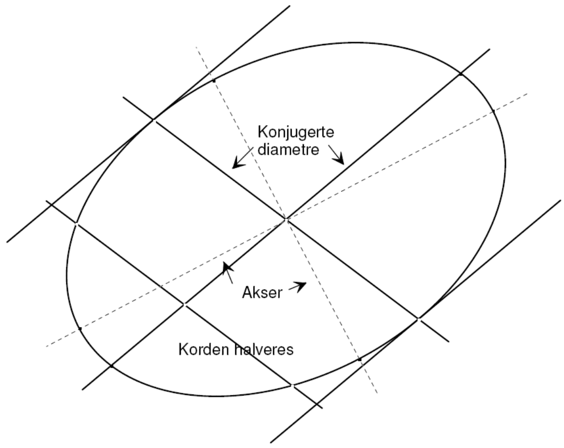
14. Den generelle ligningen for alle kjeglesnitt er gitt ved ligningen

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,xy + d`\,x + e\,y + f == 0$$

Vi ser nå på mer spesifikke forhold.

Diametre og senter

15. Sentrale elementer i kjeglesnittlæren er *senteret* og *diametre* i kjeglesnitt, og til disse er knyttet mange egenskaper. Når senteret er gitt er diametre linjer gjennom dette senteret begrenset av kjeglesnittet. Er kjeglesnittet gitt ved periferien bestemmes derimot diameteren først, og senteret bestemmes som skjæringspunktene mellom diametrene. Diametrene fremkommer nemlig på en enkel måte, knyttet til en sentral lovmessighet. Trekker vi en rekke



Figur 18: Konjugerte diametre og akser

parallelle linjer over et kjeglesnitt og halverer kordene som fremkommer, viser det seg at alle halveringspunktene ligger på samme linje. Denne linjen er en diameter til kjeglesnittet.

Setning 16. *Gitt et kjeglensnitt, og en rekke parallelle linjer som skjærer over dette. Haveringspunktene til kordene vil da ligge på samme linje. Denne linjen kaller vi en* diameter *til kjeglesnittet.*

16. Det viser seg videre at alle diametrene som dannes på denne måten møtes i samme punkt.

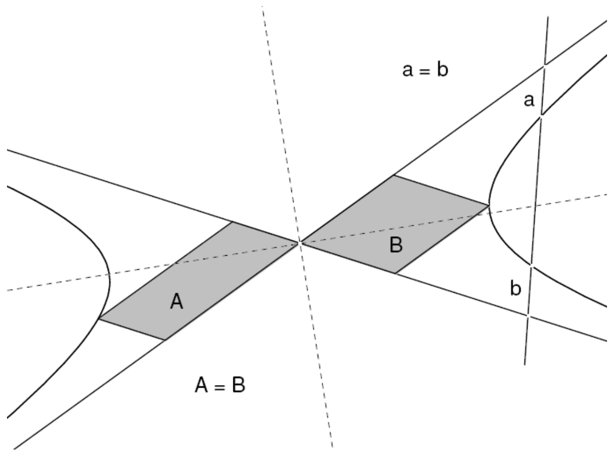
Setning 17. *Alle diametrene til et kjeglesnitt møtes i sammme punkt som vi kaller* senteret *til kjeglensnittet.*

Har vi gitt et kjeglesnitt ved dens periferi, kan vi ved disse egenskapene konstruere diametre og senter i et kjeglesnitt.

17. Ut fra en rekke parallelle linjer finner vi altså en diameter. Nå finnes det linjer blandt de parallelle som skiller seg ut. Den ene av disse er den linjen som også går gjennom senteret til kjeglesnittet, og denne kalles den *konjugerte diameteren* til den som blir funnet.

18. De andre linjene som skiller seg ut blandt de parallelle er *tangentene* til kjeglensittet. En diameter er dermed en konjugert diameter til en annen når den går gjennom punktene som parallelle tangenter danner med kjeglesnittet.

19. Blandt diametrene er det to som skiller seg ut, og det er den lengste og den kortenst diameteren. Disse kalles *aksene* til kjeglesnittet, og vi vil her



Figur 19: Hyperbel og asymptoter

kalle disse *langaksen* og *kortaksen*. Disse kan vi finne ved å slå en sirkel om senteret til ellipsen, og der den skjærer denne, halverer vi, og vi får aksene. Kjeglesnittene er symmetriske om aksene.

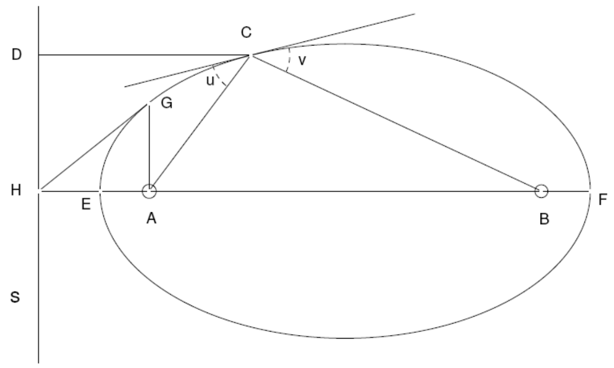
Hyperbelens og dens aymptoter

20. Noe særegent er knyttet til hyperbelen som vi ikke finner for de andre kjeglesnittene, nemlig dens *asymptoter*. Disse har vi allerede sett på, og de finnes som to spesielle diametre, og de er også konjugerte til hverandre.

Setning 18. *Gitt to linjer. Vi finner punkter slik at produktet av avstandene fra punktet til asymtotene parallellt med de andre asymtotene er konstant. Da vil punktene danne en hyperbel.*

Brennpunkt

21. I tillegg til senteret finnes to sentrale punkter knyttet til kjeglesnittene, som i mange sammenhenger er av vel så stor betydning. Dette er brennpunktene til kjeglesnittene. Fenomenene som innebærer brennpunkter er også mangfoldige, og de har en annen karakter enn de vi har sett så langt. Dette skillet kan karakteriseres ved at de første fenomene innebærer parallelle linjer på en eller annen måte, mens fenomenene knyttet til brennpunkt innebærer sirkelen.



Figur 20: Egenskaper ved ellipsen

22. Den mest umiddelbare måte brennpunktene viser seg på er ved addisjonslovmessigheten.

Setning 19. ***Addisjonssetningen***
Gitt et en ellipse og de to brennpunktene. Da er summen av avstandene fra et punkt på en ellipsen til de to brennpunktene konstant, og summen er lik storaksen til ellipsen.

23. Denne sammenheng kan brukes som definisjon på ellipse, og konstruksjonsmessig får vi ellipsen til å fremtre ved å starte med to brennpunkter, og finne punkter som angitt over.

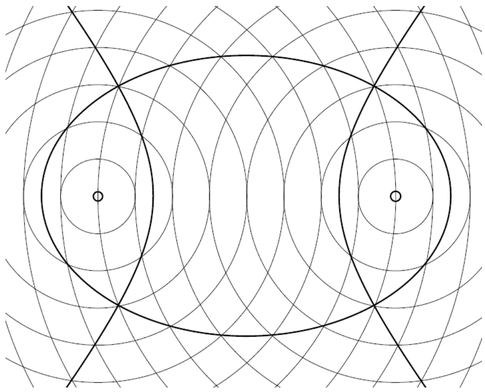
24. Definisjonen over gjelder bare ellisen, for de andre kjeglesnittene gjelder noe som egentlig er modifikasjoner, men som opptrer ganske annerledes. Hyperbelen fremkommer således ved en konstant differanse.

Setning 20. *Gitt et en hyperbel og de to brennpunktene. Da er differansen av avstandene fra et punkt på en hyperbelen til de to brennpunktene konstant, og summen er lik transversaksen til hyperbelen.*

Slik som for ellipsen kan vi få hyperbelen til å fremtre ut fra denne setning.

Brennpunkt og styrelinje

25. Når det gjelder parabelen inntrer enda noe særskilt. Denne har bare et brennpunkt, og vi kan betrakte den som en langstrakt ellipse der det ene



Figur 21: Ellipser og hyperbler fra kosntant sum og differanse

brennpunktet har gått til uendelig. Dette fører til at setninger knyttet til to brennpunkter ikke gjelder for parabelen, men vi har en lovmessighet som vi siden skal vise står i umiddelbar forbindelse med de to over. Vi tar da utgangspunkt i brennpunktet, og en bestemt linje, den såkalte *styrelinjen* til parabelen.

Setning 21. *Gitt en parabel, brennpunktet og styrelinjen. For alle punkt på parabelen vil avstanden til styrelinjen være den samme som avstanden til brennpunktet.*

26. Denne setningen kan vi også anvende som definisjon, og til å konstruere en parabelen på en enkel måte. Det er relativt enkelt å finne parabelligningen fra denne sammenhengen.**??**

27. Styrelinje er ikke bare knyttet til parabelen, den er også kyttet til ellipse og hyperbel. For hver av disse er det knyttet en styrelinje til hvert brennpunkt. Men i realiteten er det ikke tale om fire elementer på en gang, men enten om to brennpunkt, eller et brennpunkt og den tilhørende styrelinje. Til det siste er knyttet en sentral lovmessighet, som gjelder alle kjeglesnittene.

Setning 22. ***Forholdssetningen***
Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt og den tilhørende styrelinje. Fra hvert punkt på kjeglesnittet er forholdet mellom avstandene til brennpunkt og styrelinje konstant.

28. Også denne setningen brukes som definisjon på kjeglesnitt. Fra denne kan kjeglesnitt konstrueres, og det er relativt enkelt å se overgangen til addisjonssetniingen og differenssetningen. Ved å variere konstanten fremkommer de ulike kjeglesnittenen; når den er mindre enn en har vi en ellipse, er den

større enn en har vi hyperbelen, og er den lik en fremkommer parabelen. Vi ser at da fremkommer parabelsetningen ovenfor.

Omhylningskurver

29. Så langt har vi sett på punktfremkomster av kjeglesnittene knyttet til brennpunktene, men vi har også sammenhenger der tangenter er involvert. Mens vi når det gjelder punkter har med lengder å gjøre, trer her vinklegenskaper frem. En sentral setning, som også gir alle kjeglesnittene, er følgenede:

Setning 23. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt til dette, og en sirkel cosentrisk med dette, og diameter lik storakse. Vi trekker en linje gjennom brennpunktet, og der denne skjærer sirkelen reiser vi en normal. Denne vil da være tangent til kjeglesnittet.*

30. Ved å starte med en sirkel og et punkt kan vi ut fra denne lovmessigheten konstruere kjeglesnittene. Vi trekker da linjer gjennom punktet, og der disse skjærer sirkelen, reiser vi normaler. Alle normalene vil da omhylle et kjeglesnitt, slik som vi ser av figur 22

31. Ved å variere sirkelen får vi frem en rekke kjeglesnitt. Starter vi med punktet inne i sirkelen fremkommer ellipsen. Vi holder så fast det punktet på sirkelperiferien som er nærmest brennpunktet, og lar sirkelen vokse. Vi får da en mer og mer langstrakt ellipse, og idet sirkelen blir en linje, oppstår parabelen. Når sirkelen igjen lukker seg i den andre retningen fremkommer hyperbelen. Vi har ved også ved dette en dynamisk forvandling av kjeglesnittene.

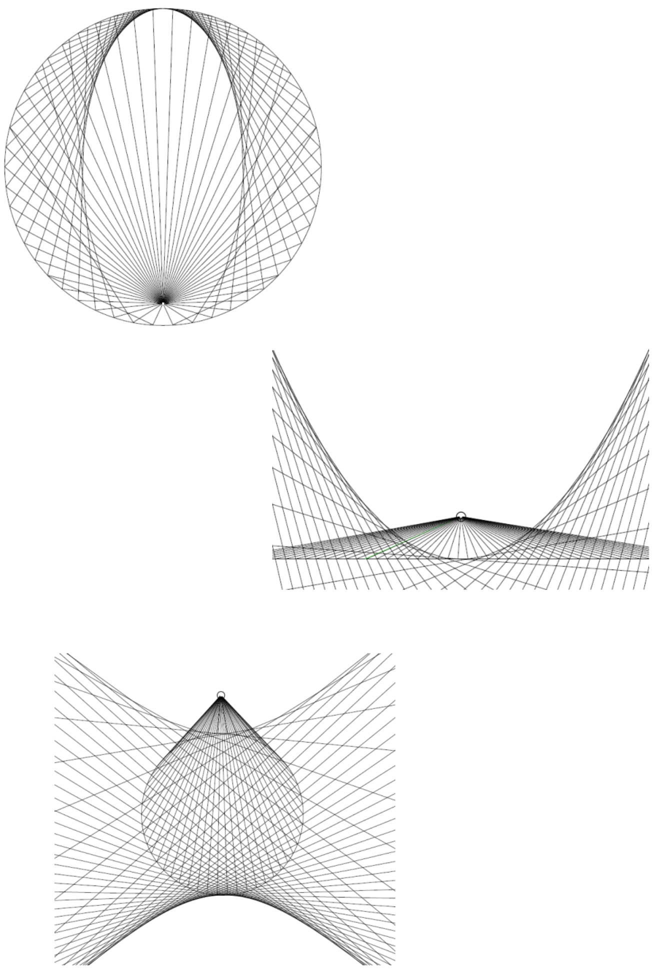
32. For parabelens del kan vi skrive opp setningen spesielt, fordi vi ikke lenger har å gjøre med sirkel, men med linje.

Setning 24. *Gitt en parabel, brennpunktet, aksen, og en normal til aksen der denne skjærer parabelen. Vi trekker en linje gjennom brennpunktet, og der denne skjærer normalen reiser vi en normal til linjen, og denne vil da være tangent til parabelen.*

Vi skal senere se at denne setningne har betydning i og for seg.

33. En sentral sammenheng, som også har praktisk betydning er en forbindelse mellom punkt og tangentperspektivet.

Setning 25. *Gitt et kjeglesnitt, dets to brennpunkter, og to linjer fra disse til et punkt på periferien. En tangent til kjeglesnittet i dette punktet vil da halvere vinkelen mellom de to linjene.*



Figur 22: Innhyllede kjeglesnitt

Dette forhold innebærer at alt lys som utgår fra det ene brennpunktet i en ellipse, vil reflekteres via periferien til det andre brennpunktet.

34. Når det gjelder parabelen ligger det ene brennpunktet i uendelig, hvilket innbærer en modifikasjon av setningen over:

Setning 26. *Alle linjer parallelle med aksen i en parabel, vil reflekteres via periferien til brennpunktet.*

Parabolspeil og parabolantenner benytter dette prinsippet for å samle lys og radiosignaler.

Del II

Morfologien

Kapittel 1

Utgangspuntet

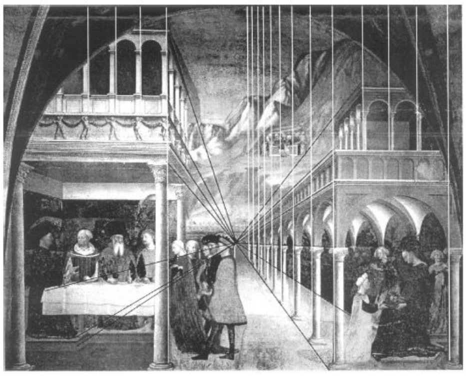
På midten av 1600 tallet, som er nevnt innledningsvis, finner vi de første impulser til det som skulle bli den nyere geometri ved arbeidene til Girard Desargues og Blaise Pascal. De utviklet helt nye metoder, og disse metodene er også knyttet til to sentrale geometriske setninger som bærer deres navn. På et vis bærer disse arbeidene begge aspektene i en morfologisk geoemtri, men vektleggingen går til to sider. Ved Desargues setning møter vi en overordnet struktur, som også har visse forvandlingsmuligheter i seg. Pascals setning bærer ikke i den grad den samme sluttethet i strukturen, men den har flere forvandligsmuligheter i seg. I morfologien søkes disse sidene å enes.

1.1 Desargues konfigurasjon

1. Et nytt innslag i kunsten ved inngangen til den nyere tid er at billedkunstnere ville avbilde rommet så virkelig som mulig. De søkte derfor metoder til å kunne avbilde tredimensjonale objekter eksakt slik som man så dem. Man gjorde rent konkrete avbildninger ved hjelp av en glassplate; fra et siktepunkt tegnet man inn de ulike objekter slik man så dem på platen. Dette utviklet seg til mer utviklede metoder hvor man tegnet inn geometriske figurer i planet.

2. Desargues var arkitekt av yrke, og ut fra kunstneriske perspektivbetraktninger utviklet han sine geometrisk synspunkter. Han arbeidet med linjestrukturer i perspektiv, men han fant også resultater for en sirkel sett i perspektiv. Ved betraktninger av trekanter i perspektiv kommer han frem til en grunnleggende setning; Desargues setning.

3. For å vise Desargues setning begynner vi med et enklere bilde; en ren forstørring av en trekant. Vi har gitt en trekant, og et perspektivpunkt inne i trekanten. Gjennom perspektivpunktet trekker vi stråler gjennom trekantens



Figur 1.1: Perspektiv

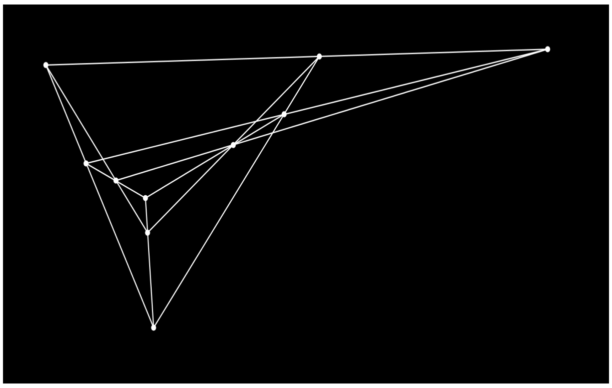
hjørner. Vi legger så en parallell til den ene av trekantens sider på utsiden av denne, og der den treffer strålene fra senteret trekker vi nye paralleller med de andre trekantsidene. Disse parallellene vil da møtes på den tredje strålen, og vi har fått en ny trekant som er perspektivisk med den første. Det dreier seg om en ren fortørrelse, og er den enkleste type perspektiv. (Fig.**??**.A)

4. Vi ser nå på det bildet vi har fått som en helhet, og tenker oss hele denne konfigurasjonen i perspektiv. Det vil si at vi tenker oss hvordan det hele tar seg ut hvis dette er en figur på bakken som vi ser fra siden. Hjørnene i trekanten er vil her fortsatt være forbundet ved tre linjer gjennom et punkt. De parallelle linjene vil imidlertid ikke lengre være parallelle, de vil nærme seg hverandre ved større avstand, og på horisontlinjen vil de møtes. Dette gjelder for alle tre par parallelle linjer. Hele bildet som er fremkommet er nå Desargues konfigurasjon. Vi kan utrykke den i en setning. (Fig.1.2)

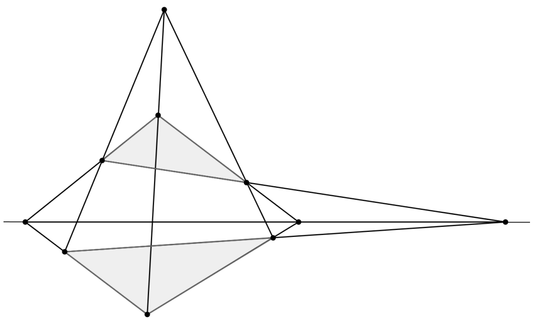
Bilde 1. ***Desargues setning***
Gitt to trekanter i perspektiv. Da vil samsvarende sider i trekanten møtes i tre punkter som alle ligger på en linje. Denne linjen kaller vi Desargues linje, *og vi kan kalle perspektivpunktet* Desargues punktet *i konfigurasjonen.*

5. Når de tre hjørnene i to trekanter ligger på de samme tre linjer gjennom et punkt, da kaller vi dem *punktperspektiviske.* Når de tre sidene i to trekanter møtes i tre punkter på samme linjer, da kalles de linjeperspektiviske. Desargues kan ut fra disse definisjonene skrives kort:
Desargues setning *Når to trekanter er punktperspektiviske, da er de også linjeperspektiviske.*

6. Konfigurasjonen kan også betraktes som en fremkomst i rommet. Den kan da ses som en trekantet pyramide som skjæres over med et plan; Desargues



Figur 1.2: Desargues setning

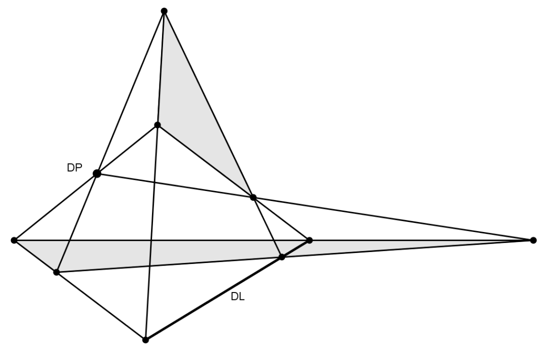


Figur 1.3: Trekantavbildning

linjen blir da linjen mellom dette plan og grunnplanet. Også som skyggen av en trekant fremkommer konfigurasjonen. (Fig.1.3)

7. Desargues konfigurasjon har allerede urbildets karakter, fordi den ved nærmere ettersyn viser seg å være helt symmetrisk i strukturell forstand. I konfigurasjonen finner vi i alt ti linjer, og på hver av linjene finner vi tre punkter. Det finnes også ti punkter, og gjennom hvert av punktene har vi tre linjer. Ser man videre på de ulike punktene og linjene finner man at det ikke er noen strukturell forskjell på dem. Dette betyr at alle punkter kan settes som perspektivpunkt; valget av punkt gir to bestemte trekanter, som igjen gir en bestemt perspektivlinje.

8. Ser vi på hvordan konfigurasjonen fremkommer i rommet blir vi klar over denne symmetrien. Vi har å gjøre med et tetraeder som blir skåret over av et



Figur 1.4: Endring av perspektivpunkt

plan. Tetraederets struktur har vi gitt ved fjerde rekke i Pascals aritmetiske trekant; det har fire plan, seks linjer og fire punkter, og tallene finnes i rekken (1,4,6,4,1). I Desargues konfigurasjon kommer et plan til, og dermed har vi med fem plan å gjøre. Disse planene danner to og to i alt ti linjer, og tre og tre møtes i ti punkter. Vi identifiserer disse tallene som tre tall i femte rekke i Pascals aritmetiske trekant. Denne rekke er gitt ved tallene (1,5,10,10,5,1). For fullstendighetens skyld kan vi også si at de fem planene danner 5 tetraedre.

1.2 Punkter og linje i uendelig

9. Går vi tilbake til de perspektiviske trekantene med parallelle linjer finner vi ikke den samme symmetrien som i den fullstendige Desargues konfigurasjon. Her er det i alt syv punkter, mens det finnes ni linjer. Det ene punktet; perspektivpunktet, skiller seg også ut fra de andre punktene.

10. Det kan også inntreffe at bare et par linjer i perspektiviske trekanter er parallelle. Det viser seg da at perspektivlinjen blir parallell med disse. Konfigurasjonen endrer også her karakter. Fremdeles finnes ti linjer, hvorav tre er parallelle. Det finnes imidlertid bare ni punkter.

11. Ved slike vurderinger fremstår bildene med parallelle linjer som spesielle. Slike overveielser kan man tenke seg at Desargues gjør når han innfører elementene i uendelig. Han sier nemlig at to linjer alltid møtes i et punkt; når linjene er parallelle møtes de i et punkt i uendelig. Når to punkter ligger i uendelig, og det går en linje gjennom disse, da ligger hele linjen i uendelig. Dermed består symmetrien i konfigurasjonen hvordan enn elementene ligger, bare er det noen elementer som av og til ligger i uendelig.

12. Hva vi skal forstå med et slikt punkt skal forstås har vært kilde til mange kontroverser. Det er jo opplagt at det rent faktisk ikke lar seg gjøre å finne noe slikt punkt, og av den grunn var mange uvillige til å akseptere et slikt begrep. En måte å løse problemet på var å kalle punktene i uendelig ideelle punkter, og derved skille dem fra dem vi kan konstruere med. Et slikt punkt ble da bestemt av en linjes retning. Vi skal ikke ta opp denne problemstillingen i sin bredde her, men kommer tilbake til det når vi ser på imaginære punkter, som skapte enda større kontroverser.

13. Parallellitet blir i et slikt perspektiv noe spesielt; det prinsipielt første blir den generelle Desargues setning. Mens vi fant Desargues setning ved å betrakte perspektivet setter vi nå denne først, og slutter til de spesielle bildene. Sammenhengen med to perspektiviske trekanter innledningsvis blir da en følge av Desargues setning: Gitt at to par samsvarende linjer i konfigurasjonen er parallelle. Da vil to punkter ligge i uendelig, og Desargueslinjen som går gjennom disse, vil være *linjen i uendelig*. Det siste paret samsvarende linjer som også møter hverandre på denne linjen blir dermed parallelle.

14. Lovmessigheten kan ytterligere varieres; det opprinnelige perspektivpunktet kan ligge i uendelig, eller et eller flere av hjørnene i trekantene. Dette gir opphav til flere setninger som kan begrunnes. Et eksempel er følgende.

Bilde 2. *Gitt to trekanter med hjørner på tre parallelle linjer. Da vil to og to samsvarende linjer i trekanten møtes i tre punkter på samme linje.*

15. Et nytt spørsmål melder seg: Hva mener vi egentlig med parallelle linjer i den rene geometri. Når vi ikke bruker metrikk er det faktisk ikke noe svar på dette. Vi kan bare si at det er linjer som møtes i et punkt på linjen i uendelig, men vi kan egentlig legge denne linjen hvor vi vil. Da vil det skje at når to par linjer i trekanten møtes på den vilkårlige linjen i uendelig, da vil det tredje paret gjøre det.

16. Har vi imidlertid gitt to faktisk parallelle linjer, da kan vi finne paralleller til denne ved hjelp av Desargues setning, og har vi gitt to faktisk parallelle linjer, da kan vi finne faktiske paralleller til alle linjer ved Desargues konstruksjoner. Slik sett virker Desargues setning som en konstituerende struktur i geometrien.

1.3 Desargues setning som aksiom

17. Slike overveielser gjør at man i dag ser på Desargues setning som et aksiom i den projektive geometri. Det vil si at dette er en måte å si hva vi mener ideelt sett mener med punkter og rette linjer i planet. Når vi holder

oss til verden, da kan vi med linjal tegne opp rette linjer og de vil da møtes slik som setningen sier. Men ved det henter vi begrepet linje fra den ytre verden. Ved Desargues setning heves bestemmelsen opp til et ideelt vivå; som riktignok stemmer overens med det ytre.

18. Fastsettelsen av begrepet linje er enklere i rommet. Der kan vi ideelt anskue linjer, og vi innser at de har følgende egenskap: *Gitt to linjer som har et felles punkt, og to andere som har felles punkt med begge disse. Da må de to siste også ha et felles punkt.* Vi innser at linjer i rommet må forholde seg slik til hverandre, men vi *setter* det samtidig fordi vi gjennom dette vil karakterisere en rett linje. I planet kan vi ikke si noe om linjer på denne måten, fordi en slik sammenheng er opplagt her. For å karakterisere linjer i planet må vi si at linjer er slike som kan danne en Desargueskonfigurasjon.

19. Dette at vi fastholder et helt bilde som sådan, og ut fra bildet finner spesielle bilder ved å variere elementene i bildet, er det vi etterstrever i den morfologiske geometri. Her viser Desargues setning seg som et fullstendig bilde; noe som også viser seg ved at den settes som aksiom. Variasjonsmulighetene er imidlertid snart uttømt når vi bare har med punkter og linjer å gjøre; en helt annen rikdom viser seg når vi går inn på kjeglesnittenes område.

1.4 Oppgaver

Når vi ikke har metrikk begrunnes parallellitet i forhold til gitt parallellitet. Er to parallelle linjer gitt, kan vi finne paralleller til denne, og er to par parallell linjer gitt kan vi finne parallelle linjer til alle linjer.

1. *Gitt to parallelle linjer, og et punkt utenfor disse. Finn en parallell til linjene gjennom punktet.*

2. *Gitt to par parallelle linjer, og en enkelt linje som ikke er parallell med disse. Finn en parallell til denne linjen.*

3. *Gitt to par parallelle linjer, en enkelt linje som ikke er parallell med disse og et punkt som ikke ligger på noen av linjene. Finn en parallell til den enkle linjen gjennom punktet.*

Et annet moment ved Desargues setning er at hvert punkt kan være perspektivpunkt. Hvert nytt punkt vi velger gir to nye trekanter, og en ny Desargueslinje.

4. *Gitt en Descarteskonfigurasjon. Ta utgangspunkt i et annet punkt som perspektivpunkt, finne de perspektiviske trekantene, og desargueslinjen. Dette kan gjentas med andre punkter.*

5. *Gitt et Desarguespunkt, en Desargueslinje, og to samsvarende linjer i trekantene. I tillegg er et hjørne på en trekant gitt. Finn det tilsvarende punktet på den andre trekanten.*

Kapittel 2

Pol og polare

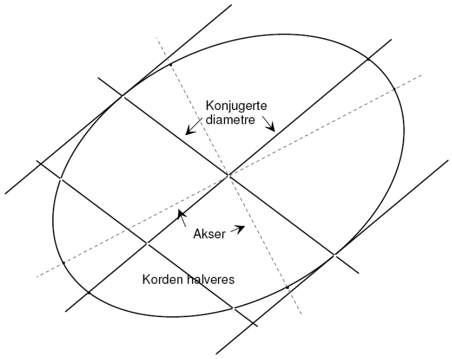
Desargues anvendte sine prinsipper også på kjeglesnitt, ved å betrakte dem som sirkler i perspektiv. Flere av de de setningene som var kjent fra gresk tid får sin elementære forklaring ved denne måte å forstå fenomenene på. Ved innføringen av begrepene pol og polare finnes en generealisering av forhold rundt senter og diametre. Her er allerede i kim det som skulle bli en hovedmetode i den projektive geoemtri; å forstå mer kompliserte sammenhenger ved å projisere til og fra enklere og umiddlebare forhold.

20. Fra den greske geometri kjenner vi et særskilt forhold knyttet til ellipsens dimametre og sentre.

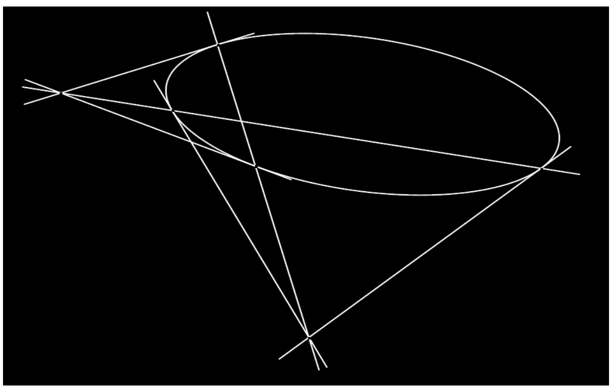
Bilde 3. *Gitt en* diameter *gjennom* senteret *til ellipsen. Denne skjærer kjeglesnittet i to punkter, og tangenter i disse punktene vil da være parallelle. Linjen gjennom senteret parallell med tangentene kalles den* konjugerte diameteren *til den første, og tangenter der denne skjærer vil være parallelle med den første diameteren.*

21. Setningen over er opplagt når det gjelder sirkler. Tar vi utgangspunkt i et bilde med en sirkel, og setter dette i perspektiv, endrer elementene posisjon, men visse forhold gjelder. De parallelle linjene møtes tre og tre på to punkter på periferilinjen. Bildet som fremtrer kan utrykkes:

Bilde 4. *Fra et punkt utenfor et kjeglesnitt trekker vi tangentene til dette, og en linje gjennom tangeringspunktene. Vi trekker en ny linje gjennom det opprinnelige punktet, og der denne møter kjeglesnittet legger vi tangenter. Disse møtes på linjen mellom tangeringspunktene.*



Figur 2.1: Konjugerte diametre og akser



Figur 2.2: La Hires setning

Setningen kalles La Hires setning.

22. Vi er her kommet frem til et projektivt bilde for kjeglesnitt. Ingen av linjene er lengre parallelle, og setningen forteller om et visst forhold som gjelder kjeglsnitt generelt, selv om det foreløpig bare er tydelig at det gjelder ellipser. Setningen over har en viss forvandlingsmulighet i seg, og som vi skal se, lar den seg generalisere til andre mer generelle teoremer.

23. I bildet som er fremkommet har vi to punkter utenfor kjeglesnittet, og hvert av punktene henger sammen med en bestemt linje dannet gjennom tangeringspuntktene gitt av punktet. Vi benevner nå et slikt punkt som *polen* til linjen gjennom tangeringspunktene, og linjen blir da *polaren* til dette punktet.

24. Setningen over kan vi ved å bruke begepene pol og polare utrykke kortere: *Gitt en pol og polare. Vi legger en ny pol på polaren, da vil polaren til denne går gjennom polen.*

25. Har vi gitt en polare utenfor en ellipse, da vil polen ligge inne i denne. Fra punkter på linjen finner vi polarer som skjærer over ellipsen, og disse møtes alle i polen til linjen. Dette henger sammen med senteret og horisomtlinjen i bildet ovenfor.

26. Omvendt finner vi polaren til punkter som ligger inne i kjeglesnittet. Vi trekker da to linjer gjennom punktet, finner polene til disse linjene, og linjen gjennom polene er polaren til det opprinnelig punket. Dermed kan vi finne poler til alle linjer, og polarer til alle punkter med hensyn på en ellipse.

2.1 Senter og diametre

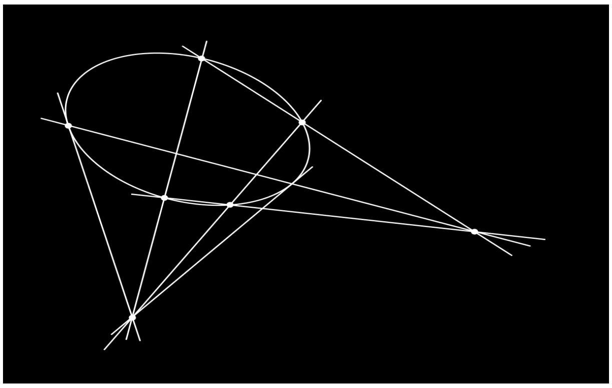
27. Fra begrepene pol og polare kan ivi gi projektive definisjoner av diametre og senter til en ellipse. Lar vi polen gå til uendelig blir nemlig polaren en diameter.

Definisjon 1. *En diameter til et kjeglesnitt er polaren til et punkt på linjen i uendelig.*

28. Lar vi istedet polaren gå til uendelig, blir polen til senteret:

Definisjon 2. *Senteret til et kjeglesnitt er polen til linjen i uendelig med hensyn på kjeglesnittet.*

Herav kan vi slutte at alle diametre går gjennom senteret, fordi alle polene til diametrene ligger på linjen i uendelig.



Figur 2.3: Utvidet La Hires setning

2.2 Utvidet La Hires setning

29. I bildene ovenfor trekker vi flere ganger paralleller fra et punkt til kjeglesnittet. Ut fra La Hires setning kan vi imidlertid ikke konstruere tangentene eksakt. En bestemt utvidelse av setningen muligjør imidlertid dette, og vi kommer frem til denne ved å først se på et sirkelbilde:

Bilde 5. *Gitt en sirkel, to parallelle tangenter til denne, og to linjer parallelle med disse. Linjer gjennom skjæringspunktene vil møtes på diameteren mellom tangeringspuntene.*

Vi innser dette umiddelbart av symmetrien.

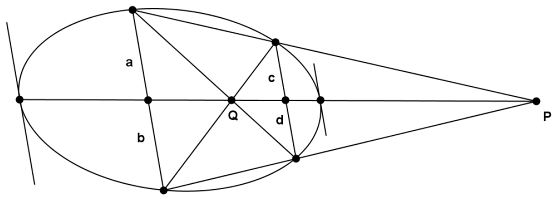
30. Når bildet over er i perspektiv oppstår setningen:

Bilde 6. *Gitt et kjeglesnitt, et punkt utenfor kjeglesnittet, de to tangentene fra punktet til kjeglesnittet, og polaren gjennom tangeringspunktene. Vi trekker to nye linjer fra punktet. Der disse møter kjeglesnittet trekker vi felleslinjer, og disse vil møtes på polaren.*

Vi kaller setningen utvidet La Hires setning.

31. Utvidet La Hires setning går over til La Hires setning når de to linjene nærmer seg hverandre og tilslutt faller sammen. Da vil linjene gjennom punktene bli tangenter til kjeglesnittet i det felles punktet, og La Hires setning fremtrer. Vi skal senere se nøyere på denne type overgang.

32. Ved utvidet La Hires setning kan vi finne polaren til et kjeglesnitt når polen er gitt. Dette kan vi gjøre umiddelbart fordi det av to linjer kan dannes to par felleslinjer som møtes på polaren, og denne kan så trekkes. Vi kunne



Figur 2.4: Halvering av korder

også trekke flere linjer over kjeglesnittet og finne flere punkter på polaren. Dette medfører også at vi kan finne tangentene fra et punkt til et kjeglesnitt når dette er gitt; vi finner først polaren, og fra denne tangeringspunktene.

33. Ligger polen inne i kjeglesnittet kan vi også anvende setningen, selv om vi ikke kan trekke tangenter i dette tilfelle. Akkurat som over trekker vi linjer gjennom polen, der disse treffer kjeglesnittet trekker vi linjer, og disse møtes på polaren.

34. Ved utvidet La Hire kan vi innse en klassisk setning som har flere anvendelser. Dette er setningen om delte korder:

Metrisk lov 1. *Gitt en diameter til et kjeglesnitt, og en korde parallell med den konjugerte diameteren. Korden blir da delt i to like store linjestykker av diameteren.*

For å begrunne setningen lar vi polen i utvidet La Hire ligge i uendelig. Tangentene fra punktet vil være parallelle, og vi finner polaren gjennom tangeringspunktentene. De andre linjene vil være parallelle med den konjugerte diameteren. Vi ser av figur 2.4 at det oppstår likeformede trekanter sett fra både P og Q som gir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; ; \; \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\frac{d}{c} = 1$$
$$a = \pm b$$

Kapittel 3

Pascals hexagram

Selv om Desargues innleder den projektive geometri, kan man si at Pascal er den som i egentlig forstand går inn på metamorfosebegrepet. Ved oppdagelsen av den mysteriøse kjeglesnittsetningen, som Pascal kaldte ”Hexagram Mysticum”, og ved sin behandling av denne, legger han frøet til det som blir den morfologiske geometrien. Det morfologiske tema når det gjelder Desargues setning er betraktningen av punkter og linjen i uendelig. Ved Pascals setning trer to andre metamorfosemotiver frem, den ene er sammenfall av punkter, og den andre er at kejglesnittet selv forvandles og går over til et linjepar. Disse ulike motivene gjør at forvandlignsmulighetene for satsen en mye større; det sies at Pascal selv fant 400 korrolarer til den.

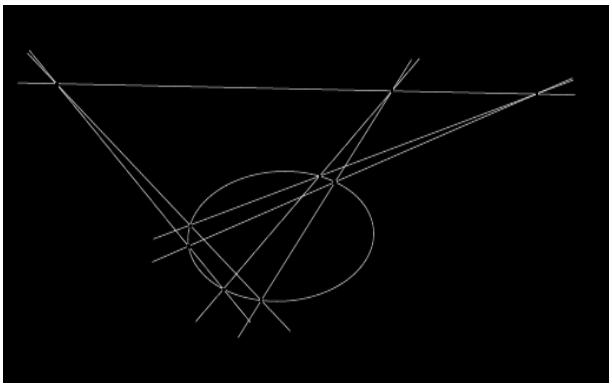
Ved de ulike overganger som gjøres inntrer spesielle forhold, som gjør at ulike kjente aspekter ved kjeglesnittet trer frem. Av særlig viktighet er det at ligningnene for Kjeglesnittene fremkommer, noe som gjør at vi kunne sette Pascals setning som utgangspunkt for kjeglesnittlæren.

3.1 Pascals Hexagram Mysticum

Slik Desargues setning fremkommer som trekanter i perspektiv, kan Pascals setning fra et synspunkt betraktes som en sirkelstruktur med parallelle linjer sett i perspektiv.

Vi starter med en sirkel, og trekker to parallelle linjer over denne. For oversiktens skyld legger vi dem ikke for langt fra hverandre, og lar kordene spenne over omtrent 120 grader. De parallelle linjene vil nå skjære over like to like store buer på sirkelen. Fra to av skjæringspunktene med sirkelen; fra to punkter ved siden av hverandre, trekker vi to nye paralleller, og disse skjærer en ny bue av sirkelen som er like stor som de to første. Trekker vi nå linjer mellom disse punktene og den opprinnelige, da vil også disse linjene være

Figur 3.1: Pascals



Figur 3.2: Pascals setning

parallelle fordi de skjærer over samme bue. Følger vi linjene vil vi se at de danner en sekskant.(Fig.3.2.A)

Bilde 7. *Når to par linjer i en sekskant innskrivet i en sirkel er parallelle, da vil også det tredje paret være det.*

Vi ser nå på det sirkelbildet vi har for oss i perspektiv slik vi gjorde med trekantbildet. Da vil to ting hende, sirkelen blir til en ellipse, og de tre par parallelle linjer møtes på den felles horisontlinjen. Vi har dermed setningen. (Fig.3.2.B)

Bilde 8. ***Pasclas setning*** *Gitt en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil motstående sider i sekskanten møtes i tre punkter som alle ligger på samme linje.*

Vi har dermed kommet frem til variant av Pascals setning. Innføringen her er ikke noe endelig bevis; det som er fremlagt er ment for å sannsynliggjøre sammenhengen. Vi antar dermed Pascals setning, og ser hva som er konsekvensene av den. At den fører til bestemte ting virker tilbake; når flere kjente ting kan avledes, da blir vi fortrolig med setningen, og kan ta den med videre i de morfologiske betraktningene.

Det første vi kan bli klar er at vi kan legge sekskanten hvordan vi vil på kjeglesnittet. Det dreier seg ikke om en sekskant som anskuelse, men som struktur, der vi strekker linjer mellom seks helt vilkårlige punkter på periferien. Alltid vil imidlertid det inntreffe, at tre par motstående sider, i strukturell forstand, møtes i tre punkter på samme linje.

Her kan også kombinatoriske spørsmål reises. Gitt seks punkter på periferien; da kan hele 64 ulike sekskanter dannes mellom punktene, og dette gir opphav til 64 pascallinjer. Det kan videre undersøkes hvordan pascallinjene ligger; man finner alltid punkter der en pascallinje møter skjæringspunktet mellom andre pascallinjer. Disse spørsmålene skal imidlertid ikke utdypes her.

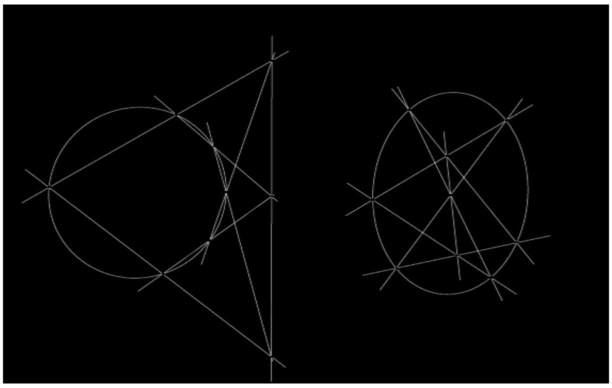
Selv om vi kan legge sekskanten hvordan vi vil, er det noen konfigurasjoner som viser seg å være av større betydning enn andre, fordi disse er utgangspunkt for de ulike morfologiske bevegelsene. Det er særlig to skikkelser av Pascals setning som kommer i betraktning. I den ene konfigurasjonen, som vi her kaller Pascal1, har vi en ordinær sekskant på en ellipse, men slik at hovedvekten av punktene ligger mot en kant. Når vi trekker motstående sider i denne, vil de møtes i tre punkter som ligger på pascallinjen utenfor ellipsen.

I det andre bildet, som vi kaller Pascal2, lar vi linjene i sekskanten krysse hverandre. Punktene i sekskanten legges i rekkefølgen 1,5,3,6,2,4 rundt ellipsen, og når vi trekker linjer i naturlig rekkefølge 1,2,3,4,5,6 dannes skjæringspunkter mellom motstående sider inne i ellipsen, og Pascallinjen går over ellipsen. (Fig.3.3)

Pascals setning gjelder på samme måte for alle kjeglesnittene, enten det er sirkel, ellipse, parabel eller hyperbel. Men bestemte ting inntreffe for hvert av kjeglesnittene, og dette er det som gjør at de fremstår som særskilte.

Før vi ser på de morfologiske tema som er knyttet til de særskilte kjeglesnittenes egenskaper, ser vi på en forvandling av selve kjeglesnittet; som ikke vil spille en videre rolle i betraktningen av Pascals setning, men som senere skal vise seg å ha den største betydning. Det dreier seg her om at kjeglesnittet utarter som vi sier, og blir til to linjer. Da vil det oppstå en konfigurasjon av bare punkter og linjer, og lovmessigheten som fremkommer kalles Pappos setning. Utgangspunktet er Pascal2, og ellipsen blir langstrakt slik at den blir til to linjer.

Bilde 9. *Gitt to linjer, og tre punkter på hver av linjene. Vi danner kryss av linjer mellom to og to punkter på hver linje, og krysningpunktene ligger*



Figur 3.3: Varianter av Pascals setning

på samme linje.

Pappos setning var kjent allerede i gresk tid, og er en av de få innsidenssetninger fra den tiden. Den er som Desargues en helt symmetrisk setning, den består av 9 punkter og 9 linjer; det er tre punkter på hver linje, og tre linjer gjennom hvert punkt. Også Pappos setning spiller en rolle i aksiomatiseringen av den projektive geometri.

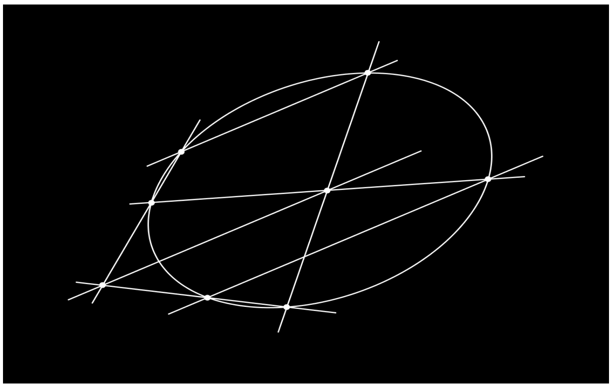
Vi skal som sagt senere se hvilken betydning dette overgangen har. Når flere kjeglesnitt er med i bildene, da vil denne overgangen forekomme på mange vis. Vi går da over til kjeglesnittmorfologien.

Vi skal se på to hovedtema; hvordan konstruksjoner fremkommer som gjør at vi kan definere de ulike kjeglesnittene særskilt, og hvordan ligningene til deres oppstår. For å oppnå dette vil skal vi gjøre bevegelser med konfigurasjonen slik at spesielle varianter fremkommer. Hver variant er egnet til sitt formål. Det er to ulike bevegelser som endrer karakteren til Pascals konfigurasjon slik at nye oppstår. Den ene bevegelsen er at linjer blir Parallelle slik som i Desargues konfigurasjon. Det andre er at punkter på periferien faller sammen. Dette fører til at tangenter oppstår, og spesielle konfigurasjoner kommer tilsyne.

Den første bevegelsen vi gjør er å la to linjer i strukturen være parallelle. Disse vil da møtes i uendelig. Pascallinjen som går gjennom dette punktet blir da også parallell med disse linjene, slik at vi får setningen.

Bilde 10. *Gitt en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt, der to motstående sider er parallelle. Da vil Pascallinjen til bli parallell med disse linjene.*

Når to par linjer blir parallelle, vil vi få to punkter i endelig. Pascallinjen som går gjennom disse punktene vil dermed bli linjen i uendelig. Det tredje



Figur 3.4: Parallelle linjer

paret motstående sider skal også møtes på Pascallinjen, og må følgelig også bli parallelle. Av dette får vi sammenhengen.

Bilde 11. *Når to par motstående sider i en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt er parallelle, da vil også det tredje paret motstående sider være parallelle.*

Vi ser at disse setningene er analoge med to av setningene knyttet til Desargueskonfigurasjon.

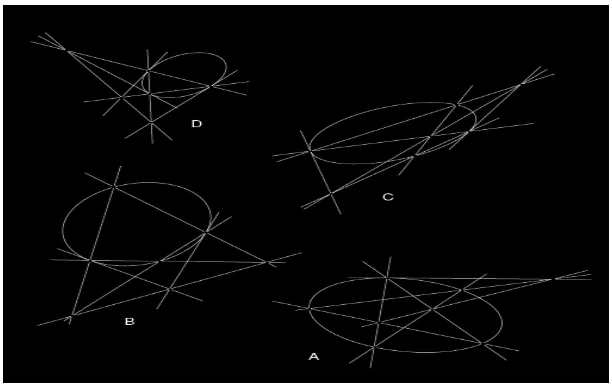
3.2 Sammenfallende punkter

Ved å bevege punktene på kjeglesnittperiferien kan det inntreffe at to punkter med felles korde går sammen til et punkt. Da er det egentlig ikke mulig lengre å finne forbindelseslinjen mellom dem. Følger vi imidlertid det som skjer idet punktet nærmer seg vil vi se at linjen mellom punktene etter hvert blir en tangent i det doble punktet. Dette er en ren geometrisk prosess som svarer til en differensial prosess i analysen. Når vi ikke anvender analytiske metoder må vi sette dette som vi finner intuitivt. Vi kan altså ikke bevise dette i vanlig forstand, men setter det aksiomatisk.

Aksiom 1. *Når to punkter i en pascalkonfigurasjon faller sammen, vil linjen mellom disse bli tangenten i det doble punktet.*

Hver gang vi har at to punkter faller sammen anvender vi dette aksiomet.

Det er flere måter et eller flere par punkter faller sammen på, og hver av måtene gir opphav til bestemte teoremer med bestemte egenskaper. Hver av variantene som fremkommer vil etter hvert anvendes til sitt spesielle formål, og vi vil gå systematisk gjennom disse.



Figur 3.5: Sammenfallende punkter

Femkantkonfigurasjon
Når et par punkter faller sammen vil vi ha en femkant tilbake, med en tangent i et av punktene. (Fig.3.5.A)

Bilde 12. *Gitt en femkant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil vi en tangent i et punkt, en linje i femkanten, og en linje gjennom to skjæringspunkter mellom de fire andre linjene, gå gjennom samme punkt.*

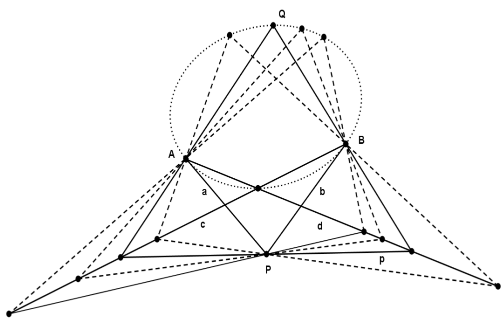
Denne setningen kan benyttes konstruksjonsmessig til å finne en tangent i et punkt når vi har gitt et kjeglesnitt. Vi finner da Pascallinjen ved to par motstående sider, og der denne treffer motstående side til tangenten trekker vi tangent til tangeringspunktet.

To par punkter i Pascalkonfigurasjonen kan falle sammen på to ulike måter. Det kan være at det er to par nabopunkter som faller sammen, eller det kan være punktene som danner motstående sider. I begge tilfellene dannes firkanter, men karakteren til konfigurasjonene blir ulike. Setningen som oppstår når to par motstående punkter faller sammen kalles Mclarens setning. (Fig.3.5.B)

Bilde 13. ***McLarens setning***
Gitt en firkant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil motstående sider, og motstående tangenter møtes i punkter som alle ligger på samme linje.

Denne setningene har sitt eget navn etter den engelske matematikeren McLaren, og kalles da McLarens setning.

For å ha et navn til den andre setningen som oppstår når to par punkter faller sammen kaller vi den McLarens andre setning. (Fig.3.5.C)



Figur 3.6: Fremkonst av kjeglesnitt

Bilde 14. ***McLarens andre setning****Gitt en firkant innskrevet i et kjeglesnitt, og tangenter i to nabopunkter i firkanten. Sider i firkanten og tangenter møtes i to punkter, linjen mellom tangeringspunktene og motstående side i et punkt, og disse punktene ligger på samme linjen.*

Den siste varianten av konfigurasjoner med sammenfallende punkter får vi når tre par punkter faller sammen. Her finnes det bare en variant. (Fig.3.5.D)

Bilde 15. *Gitt en trekant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil en sidene i trekanten møte tangentene i motstående hjørner i tre punkter som ligger på samme linje.*

3.3 Konstruksjon av de ulike kjeglesnittene

I tillegg til at Pascals setning gir egenskaper til kjeglesnittene, bestemmer den også disse implisitt. Har vi gitt fem punkter på et kjeglesnitt kan vi ved å anvende setningen finne så mange nye punkter vi måtte ønske. Dette kan vi innse hvis vi tar utgangspunkt i et gitt kjeglesnitt med en Pascalkonfigurasjon. Lar vi nå et av punktene bevege seg på periferien, da vil to av linjene følge med. Det fører til at skjæringspunktene med de motstående sidene beveger seg, og derved vil Pascallinjen dreie seg om det tredje punktet på Pascallinjen. Snur vi nå dette, og lar Pascallinjen dreie, da vil prosessen være omvendt, punktet på periferien vil da bevege seg, og den vil kunne tegne kjeglesnittet.

Denne konstruksjon ligger til grunn for alle konstruksjoner av kjeglesnitt ut fra Pascals setning. Pascallinjen dreier, to linjer følger denne, og deres skjæringspunkt tegner kjeglesnittet.

Ved å legge utgangspunktene på riktige steder, vil de tre ulike kjeglesnittene ellipse, parabel og hyperbel fremkomme, og vi vil se at disse blir forskjellige ut fra sitt forhold til linjen i uendelig. Til konstruksjon anvender vi imidlertid ikke den generelle varianten av Pascal setning, men McLaren setning, fordi konstruksjonene her blir enklere, og fordi tangentene etter hvert gjør seg gjeldende. fordi konstruksjonene her frem

Vi tar utgangspunkt i den McLaren setning som kommer ut fra Pascal1. (Fig.3.5.B) Ved å holde det øverste punktet på kjeglesnittet fast mens vi dreier pascallinjen, vil det nederste punktet bevege seg langs kjeglesnittet, og den vil dermed beskrive denne. Selve konstruksjonsmåten kan også beskrives eksplisitt.

Vi starter med to linjer a og b som danner en V, og disse møtes i P. Vi setter av et punkt A på den ene linjen, og et punkt B på den andre linjen. Gjennom punktene A og B strekker vi linjene c og d som krysser hverandre under A og B. Vi trekker så en linje p gjennom P omtrent horisontalt, og denne linjen møter c og d i hvert sitt punkt. Fra disse punktene trekker vi linjer gjennom A og B, og disse møter hverandre i Q. Når så linjen p dreier om P, vil Q beskrive et kjeglesnitt.

Vi kunne også tatt utgangspunkte i linjer gjennom Q;: linjer gjennom P skjærer disse i to punkter, og linjer gjennom disse og A og B danner også punkter på undersiden av kjeglesnittet.

Kjeglesnittet som fremkommer er en ellipse. Ved å bevege Q utover, og til slutt til uendelig slik at linjene gjennom Q blir parallelle, fremkommer en parabelkonstruksjon.

Hvis nå linjen c og d i konstruksjonsbildet dreier seg enda noe, da vil punktet Q ikke dannes over punktene A og B, men under. Gjør vi dette slik at Q blir liggende under P, da vil konstruksjonen gi en hyperbel. Ved å dreie linjen p vil vi se at punkter Q i dette tilfelle går mot uendelig, for så å ligge i uedelig når linjer blir parallelle. Så vil Q komme tilsyne igjen på undersiden av P hvor det også beskriver en bue, før det igjen forsvinner til uendelig. S kommer så igjen fra den andre siden, og buen slutter seg etter hvert.

Hyperbelen vil på denne måten fremkommer ved en kontinuerlig bevegelse, og de to deler av denne hører naturlig sammen i lys av punkter i uendelig. Vi kan at en hyperbel er et kjeglesnitt som skjærer linjen i uendelig. Parabelen er ved dette syn et kjeglesnitt som tangerer linjen i uendelig, mens ellipsen ikke berører linjen i uendelig. Ut fra dette definerer vi de ulike kjeglesnittene.

Definisjon 3. *En hyperbel er et kjeglesnitt som skjærer over linjen i uedelig, en parabel er et kjeglesnitt som tangerer linjen i uendelig, og en ellipse er et kjeglesnitt som hverken skjærer eller tangerer linjen i uendelig.*

3.4 Hyperbelens asymptoter

En særskilt forandring av konstruksjonen over kan vi gjøre for hyperbelens vedkommende. Vi lar de to punktene A og B på linjene a og b gå til uendelig. De to linjene c og d som går gjennom disse punktene vil dermed være parallelle med a og b, og vi lar dem møtes i punktet Q over P. Vi trekker linjen p gjennom P, og denne møter c og d i punktene C og D. Linjene fra disse punktene til B og A vil også nødvendigvis være parallelle med linjene a og b, og de vil møtes i punktet S. Når p dreier vil S beskrive en hyperbel.

Vi betenker nå at alle kjeglesnittene som fremkommer ved denne konstruksjonene tangerer linjene a og b i punktene A og B. I konstruksjonen ovenfor ligger derfor tangeringspunktene i uendelig, og linjene a og b vil derfor tangere hyperbelen i uendelig. Disse linjene er nå hyperbelens *asymptoter.* I den morfologiske geometri definerer vi dermed asymptotene til å være linjene som tangerer hyperbelen der den skjærer linjen i uendelig.

Definisjon 4. *Tangentene til hyperbelen der den skjærer linjen i uedelig er hyperbelens asymptoter.*

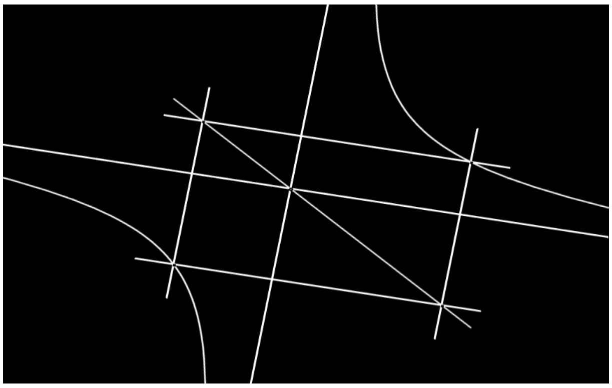
En konstruksjon for hyperbelen der vi tar utgangspunkt i asymptotene kan dermed utrykkes eksplisitt: Gitt to linjer (a og b) gjennom P, og et punkt (Q) mellom linjene. Paralleller (c og d) med a og b gjennom Q skjærer linjen p (som går gjennom P) i C og D, og paralleller gjennom disse punktene skjære hverandre i S. Når p dreier vil S tegne en hyperbel med a og b som asymptoter.

3.5 Metriske forhold

Ar vi virkelig har en hyperbel ved konstruksjonen over kan vi innse når vi studerer de metriske forhold som oppstår. Når en eller flere linjer i konfigurasjonen blir parallelle vil det kunne oppstå likedannede trekanter av ulikt slag, og ut fra betraktningen av forholdene som ligger i dette, kan vi slutte oss til forhold som gjelder for kjeglesnittene. For hyperbelen over finner vi et kjent forhold ved å betrakte den statiske varianten av konstruksjonen over.

Bilde 16. *Gitt en hyperbel og dens asymptoter, og to punkter på dens periferi på hver sin side av senteret. Gjennom punktene trekkes paralleller med asymptotene, og linjen gjennom disses skjæringspunkter vil da også gå gjennom senteret.*

Hvis vi nå ser på den rene punkt linjestrukturen som dannes; vi ser altså bort fra hyperbelen, da kan vi gjenkjenne den som punktlinjestrukturen til en velkjent metrisk sammenheng. Denne sier:



Figur 3.7: Tangenter er asymtoter

Metrisk lov 2. ***Gnomensetningen***
Gitt et rektangel, en diagonal i dette, og to linjer parallelt med sidene som møtes på diagonalen. Da dannes det to rektangler, et på hver side av diagonalen, og disse er like store.

Dette gir umiddelbart en metrisk sammenheng for hyperbelen. De to arealene dannes fra punktene på periferien, noe som tilsier at alle arealer som dannes slik er like store.

Metrisk lov 3. *Gitt en hyperbel og dens asymptoter. Fra et punkt på periferien legger vi paralleller til asymptotene, og disse danner sammen med asymptotene et parallellogram. Når punktet beveger seg vil arealet til parallellogrammet være uendret.*

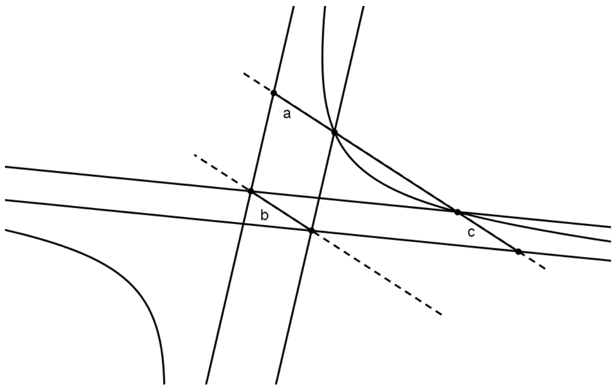
McLaren2 får en bestemt skikkelse når de to tangeringspunktene går til uendelig, og tangentene her blir asymptoter. (Fig.3.8)

Bilde 17. *Gitt en hyperbel og dens asymptoter , og to punkter på periferien. En linje gjennom disse parallell med hver sin asymptote danner nye fellespunkt med asymptotene. Linjen gjennom disse er da parallell med linjen gjennom punktene på periferien.*

Denne konfigurasjon gir opphav til en metrisk sammenheng.

Metrisk lov 4. *Gitt en hyperbel, dens asymptoter, og en linje som skjærer over hyperbelen. Mellom linjen*

På grunn av parallelliteten ser vi at linjen gjennom punktene på periferien danner linjestykker som er like lange; $a = b = c$ (Fig.3.8).



Figur 3.8: Lik lengde lov

Lovmessighet kan anvendes til å konstruere hyperbelen. Med utgangspunkt i to linjer og et punkt trekkes linjer fra punktet, og avstanden fra punktet til den ene linjen avsetter man fra den andre linjen. Disse punktene vil da tegne en hyperbel med linjene som asymptoter.

McLaren2 kan også anvendes til å finne en metrisk sammenheng på ellipser. Vi lar da de to tangentene være parallelle, og lar linjen gjennom de to punktene på periferien være parallell med linjen gjennom tangeringspunktene. Da har vi følgende:

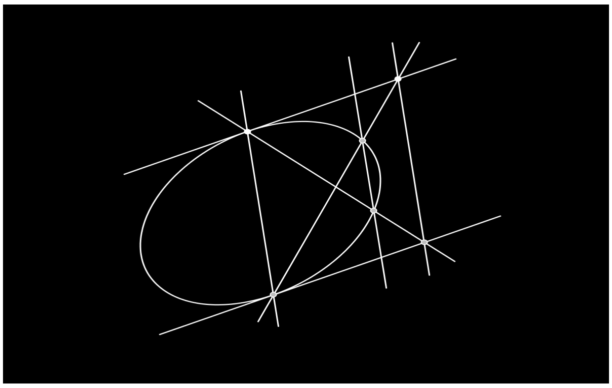
Bilde 18. *Gitt en ellipse, to tangenter til denne, og to punkter på periferien som slik at linjen gjennom disse er parallell med linjen gjennom tangeringspunktene. Vi trekker linjer mellom tangeringspunkter og punkter på periferien, og der disse møter tangenten dannes punkter, og linjer gjennom disse er da parallell med linjen gjennom tangeringspunktene.*

Ved å studere konfigurasjonene her ser vi at avstandene fra punktene på periferien til tangentene er like lange.

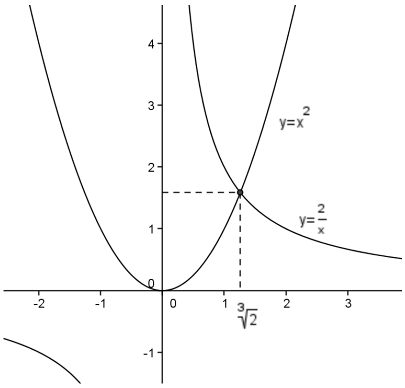
Metrisk lov 5. *Gitt en ellipse, to tangenter til denne, og linjen (l) gjennom tangeringspunktene. En linje parallell med l danner linjestykker mellom ellipse og tangenter som er like lange.*

3.6 Ligninger for kjeglesnittene

Kjennskapet til kjeglesnittene ligninger spores tilbake til problemet med Kubens fordobling, et av disse merkverdige Delfiske problemene som bidro så



Figur 3.9: Parallellitet ellipse



Figur 3.10: Kubens fordobling

mye til utviklingen av matematikken. [1] Her er oppgaven å konstruere et kubisk alter som har det dobbelte volum av et annet kubisk alter. Dette viste seg å være problematisk med bare passer og linjal, fordi det innebærer å konstruere et linjestykke som er $\sqrt[3]{2}$ større enn et annet, noe som først i vår tid har vist er umulig.

Grekeren Menaechmus har fått æren av å ha oppdaget at kjeglesnittene kan anvendes til dette, og han gir to løsninger av problemet ved disse. I det ene tilfellet benytter han to parabler, i det andre tilfellet en parabel og en hyperbel. Han benytter seg av tallforhold knyttet til disse kurvene, og ved å løse ligninger med to ukjente finner han den søkte størrelse.

Når vi allerede har sett hvordan metriske relasjoner fremkommer av Pas-

[1] De to andre problemene: Å tredele en vinkel med passer og linjal alene; Å konstruere et linjestykke som er like langt som en sirkels omkrets når vi kjenner diameter.

cals setning, så blir det å finne ligninger en forlengelse av dette, fordi ligninger også kan betraktes som metriske sammenhenger. Det lar seg derfor gjøre å finne ligningene til de ulike kjeglesnittene ut fra lignende betraknigne vi gjorde når vi fant metriske forhold. Vi skal ikke finne de helt generelle ligningene, det lar seg gjøre ved transformasjon innen analytisk geometri. Vi skal her se at de grunnliggende ligningene fremkommer. For parabelens vil vi se at ligningen $y = x^2$ fremkommer, og for ellipsen og hyperbelens vedkommende vil vi komme frem til de symmetriske ligningene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ og $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vi ser umiddelbart hvordan en ligning for hyperbelen når fremkommer av arealsetningen når x-aksen og y-aksen er asymptoter. Vi får i dette tilfelle $xy = k$ eller $y = \frac{k}{x}$.

For å oppnå de andre ligningne tar vi utgangspunkt i en bestemt variant av McLaren1, som vi også kan bruke til å konstruere kjeglesnittene. Vi tenker oss da gitt et kjeglesnitt, og legger parallelle tangenter til denne. Pascallinjen vil dermed bli parallell med disse linjene, og setningen endrer karakter.

Bilde 19. *Gitt et kjeglesnitt, og to parallelle tangenter til denne. Fra to punkter på periferien til kjeglesnittet trekker vi linjer gjennom tangeringspunktene, og disse vil skjære hverandre i ytterligere to punkter. Linjen gjennom disse punktene er da parallell med tangentene.*

Parabelen

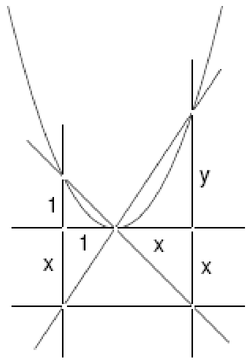
Denne konfigurasjonen får et spesielt utrykk for parabelens del. Vi tenker oss en ellipse med to tangenter, men lar så denne bli uendelig langstrakt slik at den blir til parabel. Den ene av tangentene vil ligge i ro, mens den andre blir til linjen i uendelig. Dermed får vi en modifikasjon av setningen over.

Bilde 20. *Gitt en parabel, en tangent til denne, og to punkter på periferien. Fra punktene på periferien trekker vi linjer til tangeringspunktet, og linjer parallelle med parabelen. Disse møtes i to punkter, og linjen gjennom disse punktene er parallell med tangenten.*

Ut fra denne setningen kan vi nå til den elementære parabelligningen ganske direkte. Vi lar da tangenten til parabelen være x-aksen, og lar det ene punktet på periferien være $(-1, 1)$. (Fig.4.9) Ved å betrakte de likedannede trekantene ser vi hvordan ligningen enkelt fremkommer. Vi har

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{1} \quad \Rightarrow \quad y = x^2$$

Ligningen kan generaliseres ved å velge andre verdier for det faste punktet.



Figur 3.11: Parabelens ligning

Ellipsen

Vi søker å vise ligningen for ellipsen.

Metrisk lov 6. *Ligningen for en sentral ellipse er gitt ved:*

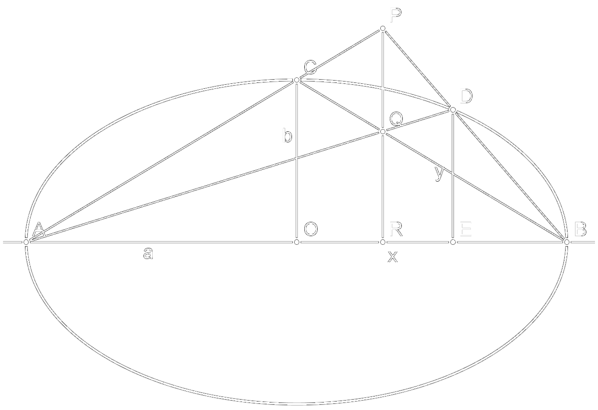
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi lar ellipsen ha senter i origo med den lengste aksen på x-aksen. De parallelle tangentene legger vi der ellipsen skjærer x-aksen, og det ene punktet på periferien velger vi der den skjærer den positive y-aksen. Det andre punktet velger vi fritt, og dette har koordinater (x,y). Linjer fra skjæringspunktene med x-aksen gjennom disse punktene vil skjære hverandre i ytterligere to punkter P og Q, og linjen gjennom disse er da parallell med y-aksen. Ved å sammenligne de formlike trekantene som dannes vil vi kunne sette opp følgende utrykk.

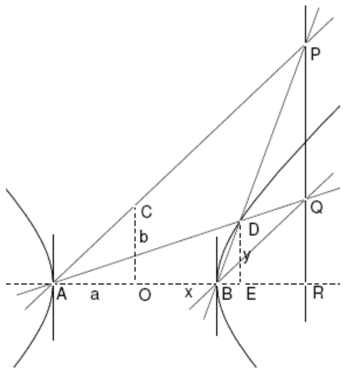
$$1)\ \frac{PR}{AR} = \frac{b}{a} \quad 2)\ \frac{QR}{BR} = \frac{b}{a} \quad 3)\ \frac{QR}{AR} = \frac{y}{a+x} \quad 4)\ \frac{PR}{BR} = \frac{y}{a-x}$$

Vi kan her legge merke til at produktet av høyresidenes 1) og 2) er lik produktet av venstresidenes 3) og 4). Dermed er også venstresidenes produkter like, som fører til

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}\frac{b}{a} &= \frac{y}{a+x}\frac{y}{a-x} \\ \Rightarrow \quad & \frac{b^2}{a^2} = \frac{y^2}{a^2+x^2} \\ \Rightarrow \quad & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$



Figur 3.12: Ellipsens ligning



Figur 3.13: Hyperbelens ligning

Hyperbelen

Så liketil er det som nevnt ikke å finne ligningen for hyperbelen når den er symmetrisk om aksene. Her får vi imidlertid også hjelp av asymptotene; vi velger det ene punktet i uendelig punkt på hyperbelen. Da dannes linjer parallelle med asymptotene, og det dannes også her likedannede trekanter. På samme måte som for ellipsen finner vi ulike like forhold.

$$1)\ \frac{PR}{AR} = \frac{b}{a} \quad 2)\ \frac{QR}{BR} = \frac{b}{a} \quad 3)\ \frac{QR}{AR} = \frac{y}{a+x} \quad 4)\ \frac{PR}{BR} = \frac{y}{x-a}$$

Den eneste forskjellen fra ellipseforholdene er at nevneren i siste ledd er $x-a$ i stedet for $a-x$. Det fører til den modifikasjon som gjelder hyperbelligningen.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a}\frac{b}{a} &= \frac{y}{a+x}\frac{y}{x-a} \\
\Rightarrow \quad & \frac{b^2}{a^2} = \frac{y^2}{x^2-a^2} \\
\Rightarrow \quad & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Dermed er alle kjeglesnittene bestemt både ved konstruksjoner og sine ligninger. Pascals setning kan derved anvendes som implisitt definisjon for kjeglesnitt.

Kapittel 4

Dualitet

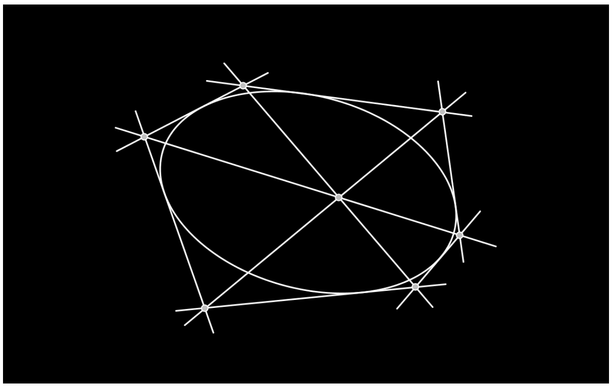
Impulsene fra Desargues og Pascal forsvant med dem fra det matematiske landskap. Helt konkret ble Pascals essay om kjeglesnitt borte; bare en skisse til dette eksisterer i dag. Også Desargues arbeider ble helt glemt, selv om disse etter hvert kom tilsyne igjen. Den analytiske geometrien som ble grunnlagt av Descartes viste seg svært fruktbar i mange sammenhenger, og med impulsene fra Leibniz og Newton utviklet denne seg både i bredde og dybde utover på 1700 tallet. Særlig gjennom Eulers arbeider ble en helt ny matematikk etablert.
Henimot slutten av 1700 tallet og på begynnelsen av 1800 tallet finner det imidlertid sted en ny spiring av den annen type geometri. I den av Gespard Monges grunnlagte Ecole Polytecknic vokste det frem et miljø der den rene geometri var sentralt. Monge selv utviklet den deskriptive geometri som gjorde det mulig å lage bilder av tredimensjonale legemer, og ut fra en rekke elever som Brianchon, Gergonne og Poncelet vokste frem det som skulle bli den projektive geometri. Selv om de til å begynne med ikke kjenner Desargues og Pascals arbeider, blir de viktigste prinsippene funnet, og flere nye blir lagt til. Dette gjelder prinsipper som dualitet og projektivitet.

4.1 Dualitetsprinsippet

35. Ved betraktningene av Desargues setning innledningsvis bemerket vi den store symmetrien i setningen, som blant annet gjorde seg gjeldende i at det var ti punkter og ti linjer i konfigurasjonen. Den samme symmetri ser vi ikke i Pascals setning. Her har vi i tillegg til kjeglesnittet ni punkter, men ikke mer enn syv linjer. Nå finnes det imidlertid en konfigurasjon antallet punkter og linjer er byttet om; det finns her ni linjer og syv punkter.

Bilde 21. ***Brianchons setning***

Figur 4.1: Dualitetsprinsippet

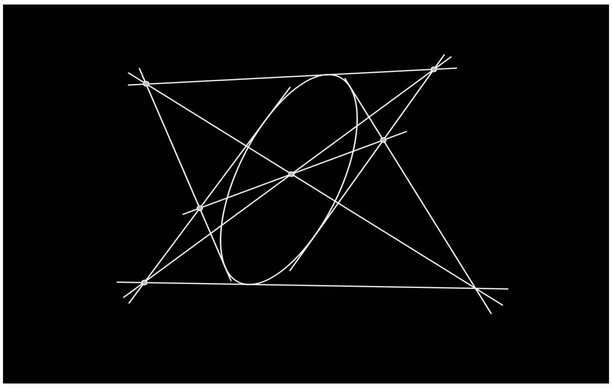


Figur 4.2: Brianchons setning

Gitt et kjeglesnitt og en sekskant som omskriver dette. De tre hoveddiagonalene i sekskanten vil da møtes i et og samme punkt.

Setningen kalles Brianchons setning, og fremtrer om mulig enda enklere i utrykket enn Pascals teorem.

36. Brianchons setning kaller vi nå *den duale* til Pascals setning. Dette kommer ikke bare av at antallet linjer og punkter er snudd om, men fordi hele strukturen er snudd om. I begge setningene tar vi utgangspunkt i et kjeglesnitt, men der vi legger punkter på periferien i den ene, legger vi tangenter til den andre. Tangenter til et kjeglesnitt er dermed det duale bildet til punkter på kjeglesnittet. Videre trekker vi linjer mellom punkter, mens vi i det duale tilfellet finner punkter mellom linjer. Dette fortsetter også; vi finner i Pascals tilfelle tre punkter mellom tre par linjer, mens vi for Brianchon trekker tre



Figur 4.3: Pappos variant Brianchon

linjer mellom tre par punkter. Til slutt trekker vi en linje mellom tre punkter, og dualt finner vi et punkt felles for tre linjer.

37. De grunnleggende dualitetsoperasjonene er derved at punkter blir til linjer og omvendt, og at linjer gjennom punkter blir til skjæringspunkter mellom linjer. Her finnes en annen begrunnelse for å innføre elementene i uendelig; ordinært finner vi alltid en linje gjennom to punkter, men for linjer finner vi ikke et felles punkt når de blir parallelle. Ved innføringen av punktene i uendelig gjelder dualiteten fullt ut.

38. Kjeglesnittene fremstår som selvduale; på periferien kan vi ha både punkter og linjer. Et annet aspekt ved kjeglesnittenes selvdualitet er at også Brianchons setning også blir til Pappos teorem. Pappos teorem er dual til seg selv; strukturene består av ni punkter og ni linjer i en symmetrisk relasjon. Mens Pascals teorem gikk over til Pappos ved at kjeglesnittet ble til to linjer, går Brianchon over når kjeglesnittet blir til to punkter. Dette skjer ved at et en ellipse blir stadig smalere, og tilslutt går sammen til et linjestykke. For å få til dette må vi velge en variant av Brianchon som tillater dette; det må ikke være noen diagonaler der kjeglesnittet blir til punkt, men diagonalene må gå til andre skjæringspunkter mellom linjene.(Fig.4.3. Pappos som oppstår kan utrykkes dualt: Gitt to punkter, og tre linjer mellom hvert punkt. Da dannes tre diagonaler mellom skjæringspunktene som møtes i samme punkt.

39. At kjeglesnittene på dette vis kan bli til på den ene siden to linjer, og på den annen side to punkter er en helt sentral egenskap. Den kommer til å spille en helt avgjørende rolle i måten hvordan de ulike bildene metamorfoseres. Dualitetsprinsippet som i utgangspunktet fremstår som et abstrakt prisnipp, viser seg å kunne forstås morfologisk ved at kjeglesnittene har denne duale forvandlingsmulighet.

40. Begge punkt- linjestrukturene; Pappos og Desargues setninger fremstår derved som selvduale. Den enkleste linje - punktstrukturen ; trekanten er også selvdual; den kan enten betraktes som tre punkter med tre felles linjer, eller som tre linjer med tre felles punkter.

41. I følge en tradisjon settes duale teoremer og forhold opp i parallelle kolonner. Selv om vi ikke følger dette kan vi summere opp de grunnleggende forhold på dette vis.

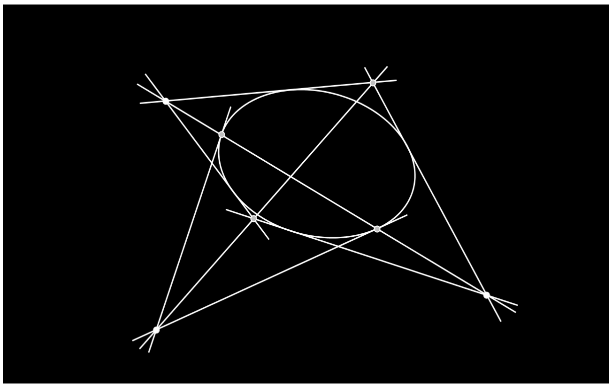
• Punkt	• Linje
• To punkter gir en linje	• To linjer gir et punkt
• En trekant består av tre punkter og tre felles linjer	• En trekant består av tre linjer og tre felles punkter
• Det finnes punkter på kjeglesnittet	• Det finnes linjer på kjeglesnittet
• Et kjeglesnitt kan bli to punkter	• Et kjeglesnitt kan bli to linjer

42. Teoremer kan også settes opp på dette vis, og rent språklig kan man bytte om på linjer og punkter og få et nytt teorem. Vi kan se på utvidet La Hire i dette lys; vi tar utgangspunkt i denne og bytter om språklig.

Gitt et kjeglesnitt, et *punkt utenfor* kjeglesnittet, de to *tangentene* til kjeglesnittet, og *polaren* felles for *tangeringspunktene*. Vi trekker to nye *linjer* fra *punktet over* kjeglesnittet. Mellom *skjæringspunkter* med kjeglesnittet trekker vi *linjer*, og disse har felles punkt med *polaren*.	Gitt et kjeglesnitt, et *linje over* kjeglesnittet, de to *skjæringspunktene* med kjeglesnittet, og *polen* felles for *tangentene*. Vi legger to nye *punkter* på *linjen utenfor* kjeglesnittet. Mellom *tangenter* til kjeglesnittet finner vi *punkter*, trekker vi *felleslinjer*, og disse har felles *linje* med *polen*.

4.2 Utvikling av Brianchons setning

43. På samme måte som ved Pascals setning kan vi dualt danne femkanter, firkanter og trekanter. Dette kunne vi gjøre rent abstrakt ved at vi tar utgangspunkt i det de allerede dannede Pascal spesialiseringer, og fulgte en



Figur 4.4: Dual utvidet La Hire

prinsipiell dualisering som den vi har beskrevet over. Vi vil imidlertid holde oss nærmere til morfologien ved å se også på den duale dannelsesprosessen.

44. De spesielle Pascalkonfigurasjonene oppstod ved at to punkter på periferien falt sammen til et punkt, og at forbindelseslinjen mellom dem ble til en tangent. Den duale prosess er at to linjer nærmer seg hverandre, og til slutt faller sammen. Den infinitesimale prosessen sier oss da at punktet blir tangeringspunktet der tangenten tangerer.

Aksiom 2. *Når to tangenter på et felles kjeglesnitt faller sammen til en , blir fellespunktet mellom disse til tangeringspunktet mellom tangenten og kjeglesnittet.*

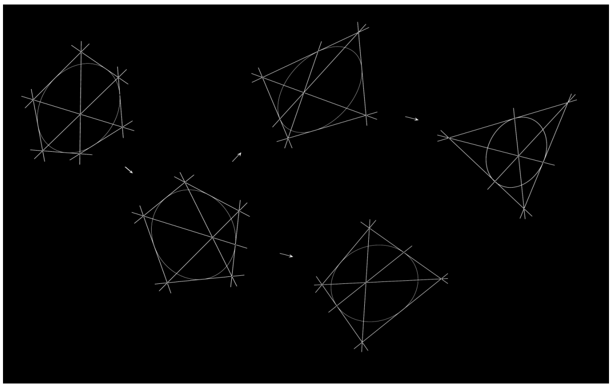
45. Alle variantene fra Pascal oppstår helt dualt til denne. Lar vi et par linjer falle sammen oppnår vi følgende setning.

Bilde 22. *Gitt et kjeglesnitt omskrevet av en femkant. Vi finner to diagonaler i femkanten. En linje gjennom det femte hjørnet i femkanten som går gjennom motstående tangeringspunkt, vil også gå gjennom skjæringspunktet mellom diagonalene.*

Denne setningen er anvendelig fordi når et kjeglesnitt er gitt ved fem linjer kan vi finne tangeringspunktene mellom kjeglesnittet og linjene, og derved finne fem punkter for kjeglesnittet.

46. Som for Pascals vedkommende får vi to varianter av firkanter som oppstår når to par linjer faller sammen.

Bilde 23. ***Dual Mclaren***
Gitt en kjeglesnitt, og en firkant som omskriver dette. En linje mellom to



Figur 4.5: Varianter av Brianchons setning

av tangeringspunktene vil da gå gjennom punktet der diagonalene i firkanten møtes.

47. Den andre firkantsetningen er gitt ved:

Bilde 24. *Gitt en kjeglesnitt, og en firkant som omskriver dette. To linjer mellom tangeringspunkter og hjørner i firkanten, vil møtes på en diagonal i firkanten*

48. Til slutt har vi den duale av trekantsetningen.

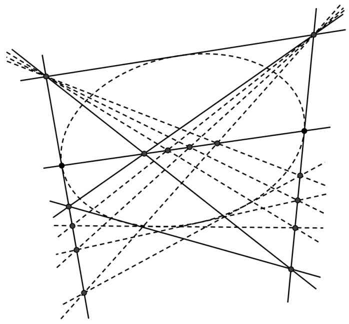
Bilde 25. *Gitt en trekant, og et kjeglesnitt innskrevet i dette. Linjene mellom hjørner i trekanten og tangeringspunktene, vil møtes i samme punkt.*

Disse utviklingene er gitt i figur 4.5

49. Som for Pascals setning kan vi utlede flere forhold også ved Brianchons setning. Vi oppnår konstruksjoner, metriske forhold og ligninger. Også her kan vi finne de ulike varianter ved morfologiske bevegelser, eller vi kan oversette konstruksjonene direkte ved å dualisere pascalvariantene.

4.3 Duale konstruksjoner

50. Ved å anvede Pascals setning kunne vi konstruere kjeglesnitt som punktkurver. Ved Brianchons setning gjøres det duale; kjeglesnittene fremstår som linjekurver, eller innhyllningskurver. Ved å finne en rekke tangenter til et kjeglesnitt ut fra Brianchons struktur, dannes kurven.



Figur 4.6: Lokus av ellipse

51. Det tydeligste konstruksjonsbildet får vi ved å begynne med det duale McLaren. teoremet sier at når et kjeglesnitt er omskrevet av en firkant, da vil linjene mellom motstående tangeringspunkter går gjennom diagonalenes skjæringspunkt. Vi starter da med tre sider i firkanten, og setter inn en diagonal. Fra et punkt på diagonalen trekker vi linjer til hjørnene, og gjennom punktene der diagonalene møter motstående side trekker vi en linje; dette er en tangent til kjeglesnittet. Ved å fortsette prosessen fremkommer en ellipse.

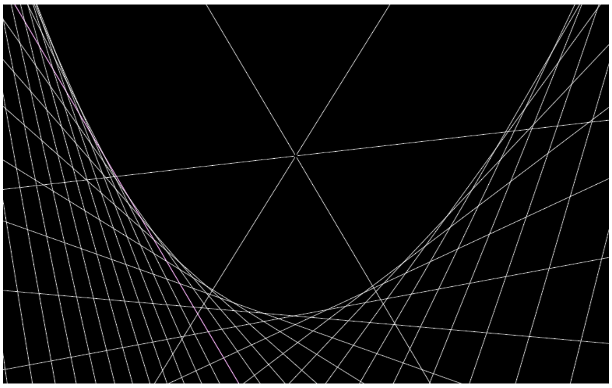
52. Konstruksjon av parabelen kan fremkommer ved en modifikasjon av McLaren. Vi lar de to tangentene ligge som en "V", og lar den øvre tangenten gå til uendelig. Den uendelige ellipsen går over til en parabel, og vi får lovmessigheten:

Bilde 26. *Gitt en parabel, to tangenter til denne, og linjen mellom tangeringspunktene. Vi finner paralleller til tangentene som møtes på transversalen, og der disse møter tangentene trekker vi en linje. Denne er også en tangent til parabelen.*

Lar vi nå punktet på linjen bevege seg, vil den nye tangenten innhylle parabelen.

53. Lar vi den øvre tangenten bevege seg enda videre, slik at den kommer fra opp nedenfra, vil kjeglesnittet være en hyperbel. Konstruksjonen av hyperbelen foregår på samme måte som for ellipsen sin del.

54. Som for Pascalvarianten kan vi også her la tangeringspunktene gå til uendelig. de to tangentene bir da asymptoter. Transversalen vil også gå til uendelig, og punkter på denne vil gi parallelle linjer, som resulterer i hyperbelbildet:



Figur 4.7: Omhylning Parabel

Bilde 27. *Gitt en hyperbel, asymptotene til denne, og to tangenter. Linjene gjennom punktene der tangentene møter asymptotene er da parallelle.*

Vi konstruerer innhyllningshyperbelen ved å ha en tangent. Fra møtepuntene med asymptotene trekker vi parallelle linjer, og der de møter asymptotene, trekker vi tangenter. Ved å bevege parallellene finner vi linjer som omhyller en hyperbel.

4.4 Metriske forhold

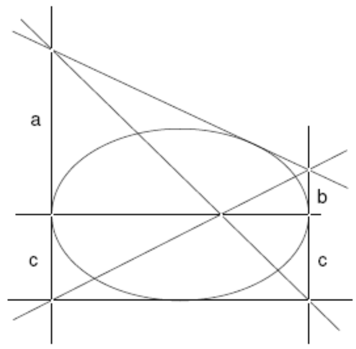
55. Slik som for Pascals vedkommende finner vi også her metriske forhold i de punktlinjestrukturene som oppstår, og det gjelder særlig når parallellitet oppstår. Vi viser en sammenheng for hvert kjeglesnitt.

56. For ellipsen tar vi utgagnspunkt i McLaren. Lar vi de to tangentene tilhøre hovedaksen være parallelle, og transversalen selv vinkelrett på disse vil denne bli aksen i kjeglesnittet. Lar vi også den tredje tangenten være vinkelrett på de to linjene, vil også produktlovmessigheten for ellipser fremkomme. Tre linjer gjennom et punkt skjærer to parallelle linjer slik at forholdene blir like. Vi har:

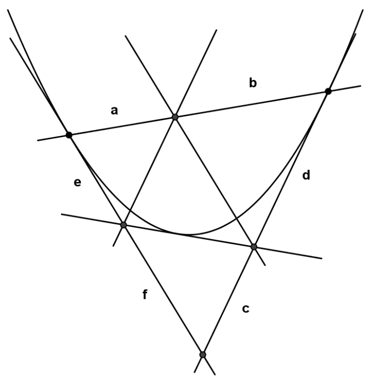
Metrisk lov 7. *Gitt et kjeglesnitt, en hovedakse, og tangentene til ellipsen der den møter hovedaksen. En tangent skjærer tangentene i to punkter, og produktet av deres høyder på aksen er konstant.*

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow ab = k$$



Figur 4.8: Produktlov ellipse



Figur 4.9: Forholdslov parabel

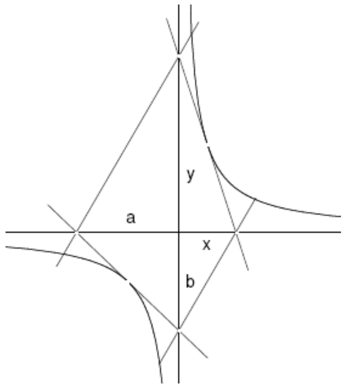
57. En kjent setning metrisk setning for parabelen gjør seg også gjeldende. Ut fra parabelens innhylling setning (26) fremkommer en kjent metrisk relasjon knyttet til denne.

Metrisk lov 8. *Gitt en parabel, og tre tangenter til denne. Da vil den ene tangenten skjære de to andre slik at forhold mellom lengder blir like.*

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

58. Vi ser av fig.4.9 at begge forholdene er lik forholdet $\frac{a}{b}$ på linjen mellom tangeringspunktene.

59. Hyperbelsetningen over gir umiddelbart en metrisk setning. De to asymptotene, tangentene og de parallelle linjene danner et trapes, og dette inneholder to likedannede trekanter. Dette gir en produktsetning:



Figur 4.10: Produktlov hyperbel

Metrisk lov 9. Gitt en hyperbel symmetrisk om x og y aksen, og en tangent til hyperbelen. Denne skjærer aksene i punkter, og produktet av avstandene til origo er konstant.

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{x}$$

4.5 Innhyllningsligninger

60. Den metriske lov vi har funnet for hyperbelen er tillike en innhyllningsligning for denne der aksene i koordinatsystemet er asymptotene til hyperbelen. Her er koordinatene linjenes skjæring med aksene. Innhyllningsligningene for kurvene når de er symmetriske om aksen fremkommer på en lignende måte som vi fant kurvene ut fra Pascal.

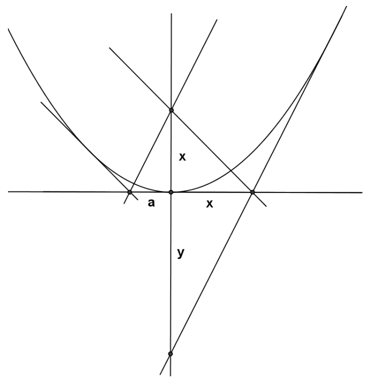
61. For å få ellipsens ligning tar vi utgangspunkt i den metriske loven.

Metrisk lov 10. Innhylningsligningen for en sentral ellipse med akser a og b er gitt ved

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

Vi ser da av figuren

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x-a} = \frac{y''}{x+a}$$



Figur 4.11: Innhylning parabel

Men vi har at $y' \cdot y'' = b^2$ slik at

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y}{x} = \frac{y'}{x-a} \cdot \frac{y''}{x+a} = \frac{b^2}{x^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow y^2x^2 - y^2a^2 = x^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$$

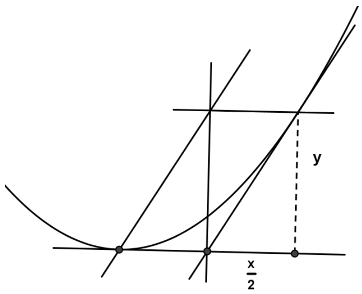
Vi ser at ligningen har samme form som punktligningen, men teller og nevner har byttet plass.

62. Ligningen for hyperbelen finnes på samsvarende vis. Ligningen for parabelen har samme form som ligningen for punktvarianten, $y = ax^2$. Vi finner den ved å sette McLaren på høykant slik vi gjorde for punktversjonen, og her blir det geometriske bildet.

Bilde 28. *Gitt en parabel, og tre tangenter til denne. Fra det ene tangeringspunktet trekker vi en diameter, og der tangenten skjærer de øvrige linjer trekker vi paralleller til den gjenværende tangent. Disse vil møtes på diameteren.*

63. For å få frem ligningen lar vi den ene tangenten være x-aksen, diameteren y-aksen, og den ene tangenten danner 45^0 vinkel med aksene. Av fig.4.11 innser vi likeformede trekanter, og ligningen finnes.

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{a} \Rightarrow y = \frac{1}{a}x^2$$



Figur 4.12: Stigningen til en parabel

64. Stigningen til den elementære parabelen fremkommer enkelt ved trekantvarianten av Brianchon. Når vi har en parabel, og den ene tangenten er linjen i uendelig har vi:

Bilde 29. *Gitt en parabel, og to tangenter til denne. Gjennom tangeringspunktet trekker vi paralleller til den andre linjen; disse møtes på diameteren gjennom fellespunktet.*

Når den ene tangenten er x-aksen ser vi forholdet.

Kapittel 5

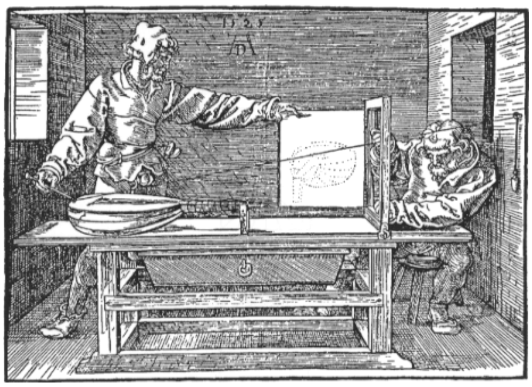
Perspektiv og projeksjon

Ved den projektive geometris fremkomst på begynnelsen av 1800 tallet ble særlig projektivitetsprinsippet avgjørende, og denne type geometri er i dag kjent under dette navn, projektiv geometri. Selv om det på den tiden fantes andre betegnelser, så som syntetisk geometri og andre, ble denne betegnelsen værende. Mye av grunnen til dette var Poncelets grunnleggende verk som ble kaldt projektive egenskaper.
I Poncelets arbeid ble begrepet avbildning helt sentralt; et begrep som skulle vise seg å bli et av de viktigste begreper i matematikken overhodet. Utover på 1800 tallet fant man den riktige måten å algebraisere geometrien på; det som ble til lineære algebra. Ved denne kan de ulike geometriske avbildninger utføres enhetlig og enkelt. Slike transformasjoner ligger til grunn for all visualisering av geometriske objekter, og endringer av disse i rommet.
Det er utenfor vår ramme å gå inn på disse transformasjonene, men vil senere se noe på de metriske prinsippene som ligger til grunn for algebraen. Vår hovedanliggende er de geometriske bildene som sådan.

5.1 Kjeglesnitt i perspektiv

65. Utviklingen av de projektive prinsipper går svært vidt så vår intensjon her er ikke å gå inn på denne i særlig detalj. Det vi vil se på et visse grunnbilder, bilder som også hører hjemme innen morfologien. Det ene grunnbildet har å gjøre med hva vi mener med perspektivisk

66. Slik som Desargues setning beskriver to trekanter i perspektiv, slik vil vi her se på to kjeglesnitt i perspektiv. Vi kan si at Desargues konfigurasjon som helhet kan differensieres i to trekanter, perspektivpunkt og perspektivlinje. På samme måte vil vi her komme frem til et bilde som bærer perspektivet i seg, men som bilde betraktet er det en del av det morfologiske landskap.



Figur 5.1: Tek

67. Den mest dagligdagse form for kjeglesnitt i perspektiv er en sirkel sett fra side. En kopp sett ovenfra er sirkulær, men sett fra siden ser vi en ellipse der alle deler er trykt sammen like mye. Dette forhold mellom ellipsen og sirkelen gir blant annet muligheten til enkelt å utlede ligningen for ellipsen ut fra sirkelens ligning.

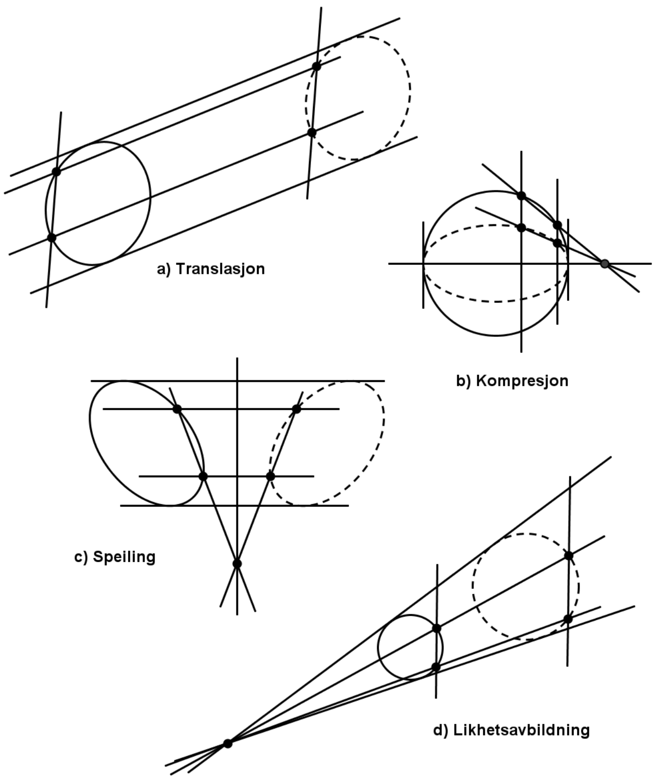
68. Rent geometrisk kan vi også angi denne endringen i formen. Vi har da gitt sirkelen, og en diameter i denne. Normalt på diameteren trekker vi linjer, og disse møter sirkelen i punkter. En ellipse med diameteren som akse deler alle kordene i sirkelen like mye. Dette viser seg derved at forbinder vi to punkter på sirkelen med en linje, og de to tilsvarende punktene på ellipsen med en linje, da vil disse møtes på aksen.

Bilde 30. *Gitt en sirkel, en diameter, og en ellipse med diameteren som akse. Vi reiser to normaler på aksen, og der disse treffer sirkelen, henholdsvis ellipsen, trekker vi linjer som møtes på den felles akse.*

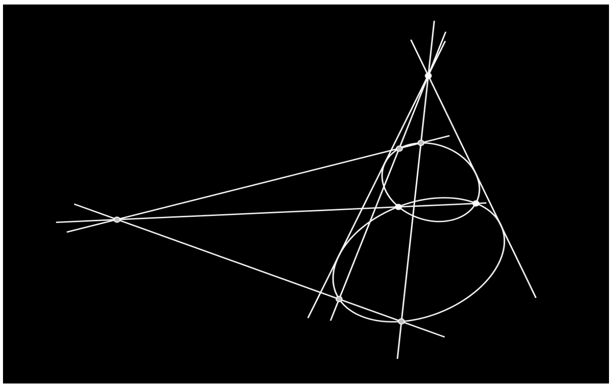
Ellipsen er her et perspektivisk avbilde av sirkelen.

69. Dette forhold kan vi anvende til å konstruere ellipsen i perspektiv. Vi har da gitt sirkelen, og et punkt på ellipsen. Gjennom dette punktet feller vi en normal på aksen. Vi reiser enda en normal på aksen, og gjennom de to normalenes skjæring med sirkelen trekker vi en linje som møter aksen. Fra punktet trekker vi en ny linje til ellipsepunktet, og der denne møter den andre normalen har vi et nytt punkt på ellipsen. Ved å variere normalen fremkommer alle punktene på ellipsen.

70. En annen type perspektiv er at vi ser ting forminsket på avstand. Vi har her en likhetsavbildning. Vi tenker oss her to likeformede ellipser, og deres to fellestangenter som møtes i et perspektivpunkt. Vi har da følgende forhold:



Figur 5.2: Varianter av perspektiv



Figur 5.3: Perspektiv bildet

Bilde 31. *Gitt to likeformede ellipser i perspektiv. Vi trekker to linjer fra perspektivpunktet, og linjer gjennom punktene på hver, vil være parallelle.*

Som over kan vi konstruere en forstørret ellipse ut fra et gitt perspektivpunkt, og et gitt punkt på den nye ellipsen.

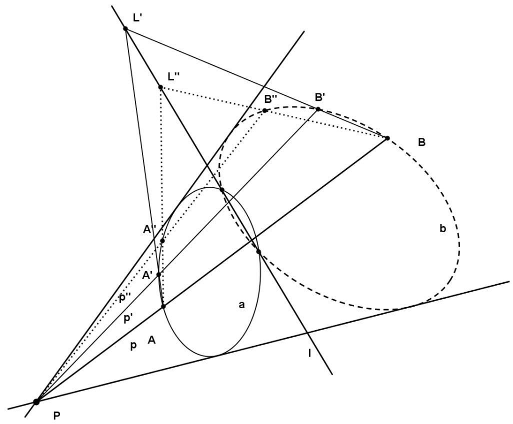
71. Vi kan nå bli klar over at den siste avbildningen også har en annen akse. Trekker vi nemlig linjer på motsatt side, vil vi se at samsvarende linjer møtes på en linje mellom ellipsene. Når ellipsene skjærer hverandre vil denne perspektivlinjen gå gjennom skjæringspunktene. Vi har her ikke å gjøre med en egentlig likhetsavbildning, ellipsen snus i tillegg.

72. I den siste avbildningen har vi altså å gjøre med både et perspektivpunkt og en perspektivlinje. Dette er det generelle, og på dette vis finnes det alltid en kontinuerlig avbildning fra et kjeglesnitt til et annet. Dette bunner i den generelle geometriske setningen:

Bilde 32. *Gitt to kjeglesnitt, en diagonal mellom dem, to fellestangenter til disse og et perspektivpunkt. Gjennom perspektivpunktet trekker vi to linjer, og der disse skjærer kjeglesnittene trekker vi diagonaler, og disse vil møtes på diagonalen mellom kjeglesnittene.*

Vi kaller dette bildet *perspektivsetningen*. Linjer mellom to skjæringspunkter mellom kjeglesnitt kaller vi *diagonaler*. Likeens kaller vi linjene mellom skjæringspunkter dannet av et kjeglesnitt og en dobbeltlinje. Senere vil vi anvende begrepet *fellespunkter* for punkter som dannes mellom felles tangenter.

73. Ut fra denne kan vi konstruere generelt et bilde av et kjeglesnitt når vi har gitt kjeglesnittet som skal avbildes, perspektivpunktet, perspektivlinjen,



Figur 5.4: Perspektivkonstruksjon

og et punkt på det nye kjeglesnittet. I fig.5.4 har vi gitt kjeglesnittet a, perspektivpunktet P, linjen l og punktet B på det nye kjeglesnittet b. Ved å trekker linjen p finner vi punktet A som er perspektivisk til B. Vi trekker en ny linje p' som gir A' på a, og vi skal finne det perspektiviske punktet B' på b. Vi trekker en linje AA' og denne gir punktet L' på l. Vi trekker så $L'B$, og der denne treffer p' har vi B'. Slik fortsetter vi for a finne bildet b av a.

74. De ulike perspektivvariantene fås alle fra dette grunnbildet. (Fig.5.2) Translasjon har vi når både perspektivpunkt og perspektivlinje er i uendelig, mens ved likhetsavbildning er bare perspektivlinjen i uendelig. Når perspektivpunktet er i uendelig, og perspektivlinjen er polaren til denne har vi kompresjon. Speiling fremkommer også ved perspektivpunkt i uendelig, men her er perspektivlinjen normalt på linjene fra perspektivpunktet, samt at et punkt på det nye kjeglesnittet er like langt fra denne linjen som tilsvarende på det opprinnelige.

75. Den projektive geometri er i sitt vesen en fortsettelse av utgangspunktet for kjeglesnittlæren, og vi innser at det bildet vi har her kan betraktes som en romlig foreteelse, der kjeglesnittene dannes ved ulike snitt av plan. Vi ser litt nøyere på dette.

76. Vi tenker oss en kjegle, og skjærer over denne kjeglen med to plan. Da fremkommer to kjeglesnitt, men vi får også en linje dannet mellom de to planene. Denne linjen vil nødvendigvis gå gjennom to skjæringspunkter mellom kjeglesnittene. Vi kaller derfor denne linjen for en *diagonal* til de to kjeglesnittene. Toppunktet på kjeglen kan vi kalle et perspektivpunkt. I bildet vi har dannet legger vi et nytt plan gjennom perspektivpunktet. Dette planet

vil skjære kjeglen i to linjer ut fra dette punktet, og det vil også skjære de to andre planene i to linjer. De tre linjene som er dannet vil da møtes i samme punkt. Fra dette innser perspektivsetningen.

77. Vi har allerede sett flere varianter av bildet, og vi skal se på ytterligere noen. Ved å la de to kjeglesnittene nærme seg hverandre kan vi etter hvert la dem ha felles tangeringspunkter med linjen. De to kjeglesnittene vil her også tangere hverandre i to punkter, og diagonalen mellom dem blir linjen mellom de to tangeringspunktene. For begge kjeglesnittene blir da diagonalen og perspektivpunktet en pol og polare, og vi kan kalle disse for en *fellespol* og *fellespolare* for to kjeglesnitt som tangerer hverandre i to punkter.

Bilde 33. *Gitt to kjeglesnitt som tangerer hverandre dobbelt, og en fellesdiagonal, to fellestangenter og en fellespol. To linjer gjennom fellespolen skjærer kjeglesnittene i to punkter hver, og linjer gjennom disse punktene vil møtes på fellespolaren til kjeglesnittene.*

Denne setningen spesialiseres ytterligere til utvidet LaHire setning når de to kjeglesnittene faller samme, og vi får ellipseavbildningen av en sirkel når perspektivpunktet er i uendelig.

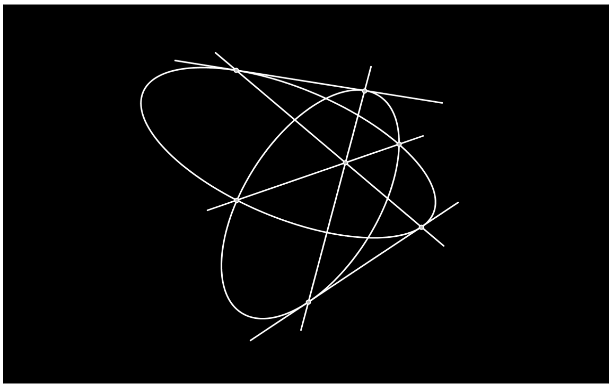
78. En bestemt skikkelse oppstår når de to linjene over kjeglesnittene går mot tangentene. Idet de faller sammen med disse, blir diagonalene mellom disse og kjeglesnittene til polarene til perspektivpunktet.

Bilde 34. *Gitt to kjeglesnitt i perspektiv. Da vil de polarene til perspektivpunktet med hensyn på kjeglesnittene møtes på diagonalen mellom disse.*

Her kan vi også tale om linjene mellom tangeringspunktene i stedet for polarer, fordi perspektivpunktet har mistet sin betydning i konfigurasjonen. (Fig.5.5)

79. De to kjeglesnittene mellom linjene kan også ligge slik at de skjærer hverandre i fire punkter. Det er da mulig å trekke hele seks diagonaler mellom dem. I en konkret sammenheng er imidlertid bare to av disse vesentlige, og hvilke dette er vil vi kunne se ved å betrakte hvilke diagonaler som fremkommer ut fra ulike plan som skjærer hverandre. Vi skal siden se at det også er morfologiske begrunnelser for dette, men i denne sammenheng er det vesentlig at vi blir oppmerksomme på at vi kan danne to ulike diagonaler ved å trekke linjer fra perspektivpunktet.

80. Ved å tekke linjer gjennom perspektivpunktet, og finne linjer gjennom skjæringspunktene med kjeglesnittene, kan vi også finne to diagonaler når kjeglesnittene bare skjærer hverandre i to punkter, og når de ikke skjærer hverandre i det hele tatt. Foreløpig kan vi definere diagonalene på denne måten når de ikke skjærer hverandre.



Figur 5.5: Perspektivlinjer som tangenter

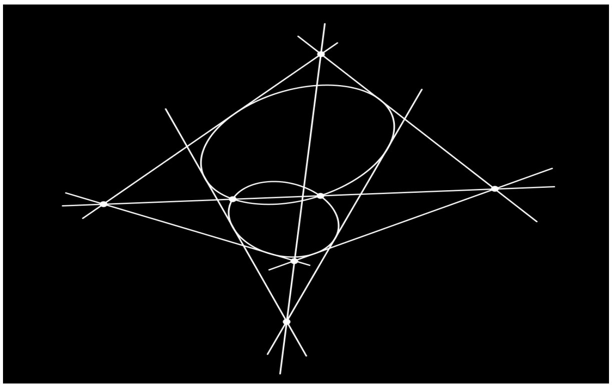
81. En vesentlig perspektiviske overgang er å finne en sirkel som er perspektivisk til et gitt kjeglesnitt. Ved dette kan problemstillinger knyttet til kjeglesnitt overføres til sirkelproblem, og når de er løste her, kan de føres tilbake til kjeglesnittet. For eksempel kan den klassiske oppgaven som går ut på å finne skjæring mellom en linje og et kjeglesnitt gitt ved fem punkter løses slik. (Denne oppgaven kan også løses på flere andre måter, og anvendelighet av ulike teoremer vil vise seg her).

82. Er et kjeglesnitt gitt ved fem punkter, da kan vi velge en hvilken som helst sirkel gjennom to av punktene som perspektivsirkel. Vi har da allerede persektivlinjen mellom dem, og for å finne perspektivlinjen anvender vi en spesialiseringen av perspektivsetnignen over. Vi legger en tangent til kjeglesnittet i et av punktene (Konstruksjon-.)som ikke er felles med sirkelen. Der denne tangenten skjærer persepktivlinjen trekker vi en tangent til sirkelen. De to tangeringspuntkene vil da ligge på en linje gjennom perspektivpunktet. Vi gjentar prosessen og finner perspektivpunktet.

5.2 Dual perspektiv

83. Vi har dannet perspektiviske bilder av kjeglesnitt ved å avbilde hvert punkt på kjeglesnittet på et annet. Ved dualt perspektiv overfører vi alle linjer på et kjeglesnitt på linjene til et annet. De betraktninger vi har gjort så langt blir visuelt tydelige når vi forestiller dem i rommet. I det duale tilfellet er ikke dette så tydelig, og vi må gjøre rent ideelle overveielser.

84. Den fundamentale setningen for dualt perspektiv dannes helt dualt til perspektivsetningen.



Figur 5.6: Dualt perpektiv

Bilde 35. *Gitt to kjeglesnitt og en diagonal til disse. Fra to punkter på diagonalen trekker vi tangenter til kjeglesnittene, og gjennom skjæringspunktene mellom disse kan vi trekke linjer som går gjennom et perspektivpunkt til kjeglesnittene.*

Vi kaller denne den duale perspektivsetningen.

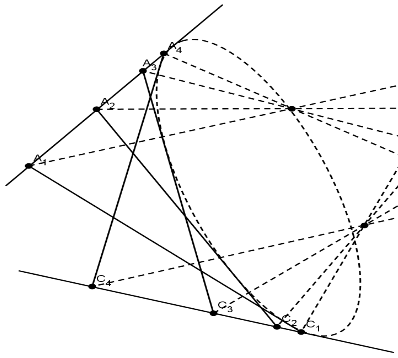
85. Et dualt perspektiv er gitt ved et kjeglesnitt, en perspektivlinje, perspektivpunktet og en tangent på det nye bildet. Mens vi tok utgangpunkt i perspektivlinjen for å finne et perspektivisk bilde, tar vi her utgangspunkt i perspektivlinjen. Vi følger så en helt dual prosess til den som er beskrevet, og et innhyllningsbilde til det opprinnelige kjeglesnittet oppstår.

5.3 Projeksjon

86. Projeksjon er på sett og vis et gjentatt perspektiv. Det vil si at en avbildning blir gjentatt; at vi ut fra et bilde finner et nytt perspektiv. Dette andre bilde er nå en projeksjon av det første, og det skiller seg i fra det rene perspektiv.

87. Vi kan definere projeksjon for hele geometriske bilder, men vi ser prinsippet enklere ved avbildning av en linje på en annen linje. Ved denne avbildningen er det ingen ny form, en linje forblir en linje. Vi kan imidlertid identifisere de enkelte punktene fra bildet med punktene på den opprinnelige bildet. Vi sier at de punkter korrelerer som har felles linje gjennom perspektivpunktet.

88. Gjentar vi nå denne avbildningen ved at vi velger et nytt perspektivpunkt og en ny linje, da avbildes alle punktene på nytt. Disse nye punktene ikke



Figur 5.7: Projeksjon

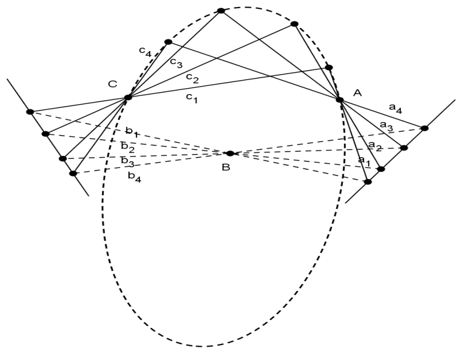
er ikke perspektiviske til de første lengre, vi finner ikke noe felles punkt som forbinder korrelerte punkter på de to linjene. Her sier vi at punktene på den siste linjen er en projeksjon av den første linjen.

89. Nå viser det seg imidlertid at forbindelseslinjene mellom korrelerte punkter alle ligger på et kjeglesnitt. Dette er en definisjon på kjeglesnitt i den projektive geometri. I den morfologiske geometri her har vi ikke dette utgangspunkt for kjeglesnitt; her må vi vise at det som fremkommer må være et kjeglesnitt ut fra de geometriske bilder vi utvikler.

90. I det som viser seg over er Brianchon setning tilstede. Vi ordner først litt på rekkefølgen over. Vi starter med en linje a, og projiserer dens punkter til linjene b og c over punktene P og Q. At vi foretar et perspektiv begge veier er ekvivalent med gjentatt perspektiv. Vi velger et punkt A på a, og dette gir punktene B og b, og C på c. Gjennom punktene P og Q går linjene p og q. Forbindelseslinjen r mellom B og C skal altså ligge på et kjeglesnitt. Når vi beveger A innser vi at visse linjer må tilhøre linjene i projeksjonen. Når A møter linjen b vil en linje herfra til B tilhøre kjeglesnittet.

91. Dermed ser vi at Brianchons setning begrunner at korrelerte punkter ligger på et kjeglesnitt. Omvendt er det slik at når vi definerer kjeglesnitt ut fra korrelerte punkter, da kan vi begrunne Brianchons setning på det vis vi har sett.

92. Vi kan også gjøre den duale konstruksjon; her har vi linjer gjennom et punkt som blir avbildet som linjer gjennom et annet punkt via en linje. Vi ser av fig.5.8 at linjene b_n er perspektiviske til linjene a_n. Vi gjentar dette og da blir linjene c_n perspektiviske til linjene b_n. Linjene a_n og c_n er nå i projeksjon gjennom punktene A og C på kjeglesnittet som formidler projeksjonene. Helt



Figur 5.8: Dual projeksjon

dualt til fremgangsmåten over kan vi begrunne at vi får et kjeglesnitt ved Pascals setning.

5.4 Projeksjoner som gruppe

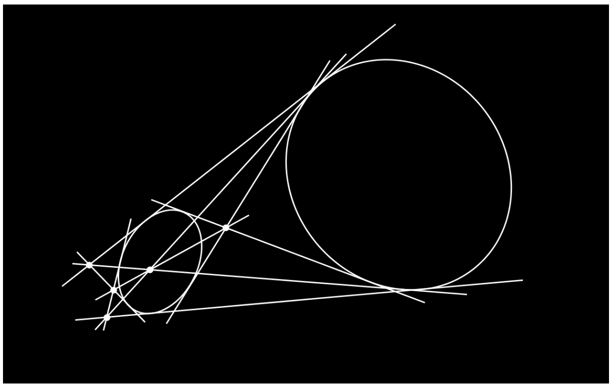
93. Hva skjer om vi går videre, og lar punktene vi har funnet bli avbildet på enda en ny linje? Da viser det seg at vi fortsatt har å gjøre med en projeksjon; en projeksjon av en projeksjon er fortsatt en projeksjon. Projeksjoner danner på denne måte en gruppe, det vil si at vi alltid kan finne en projeksjon som svarer til sammensetningene av to.

94. Disse forhold fremkommer tydelig ved de algebraiske metoder knyttet til den projektive geometri. Her uttrykkes elementene ved såkalte projektive koordinater som er vektorer med tre elementer. En projeksjon utrykkes her som resulatetet av vektoren multiplisert med en matrise. Gjentatt matrisemultiplikasjon gir fortsatt en matrise, og dermed vises gruppeegenskapen.

95. Denne gruppeegenskapen kan vises også ved bevaring av det såkalte tobbeltforhold. [1]. Det kan vises at dette gjelder for et perspektiv, og at det derfor

[1] Når punkter overføres perspektivisk fra en linje til en annen blir alle avstander mellom punktene endret, men et bestemt forhold består; dobbeltforholdet. Når fire punkter A_1, A_2, A_3 og A_4 på en linje a, blir overført til punktene B_1, B_2, B_3 og B_4 på linje b, da vil avstanden fra A_1 til A_2, delt på avstanden fra A_2 til A_3, multiplisert med avstanden fra A_3 til A_4, og til slutt delt på avstanden fra A_4 til A_1 være den samme størrelse som tilsvarende mellom punktene på b.

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4}{A_2A_3 \cdot A_4A_1} = \frac{B_1B_2 \cdot B_3B_4}{B_2B_3 \cdot B_4B_1} \tag{5.1}$$



Figur 5.9: Projeksjonssetningen

også gjelder i en projeksjon. Derfor gjelder det for en gjentatt projeksjon. Det betyr at vi også har følgende metriske setning:

Metrisk lov 11. *Gitt et kjeglesnitt, og to tangenter a og b til denne. Ytterligere fire tangenter overfører punkter fra linje a til linje b. Da vil dobbeltforholdet mellom punktene på de to linjene være det samme.*

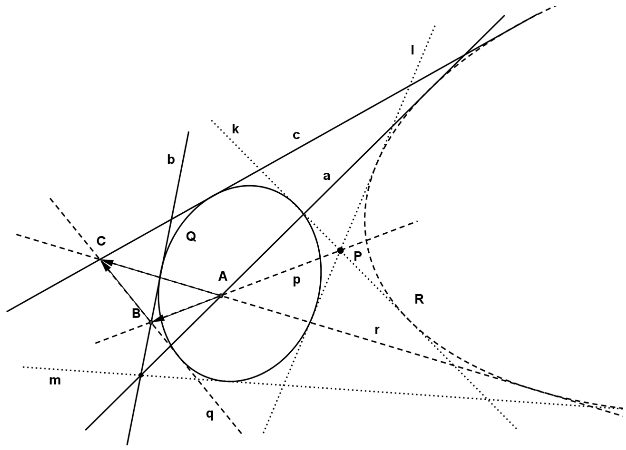
Ved å bevege tangentene på ulike måter kan vi få frem mange spesielle varianter av dette. Vi går ikke inn på dette her, men det er gitt noen oppgaver.

96. Vi kan også begrunne gruppeegenskapen til projeksjoner rent geometrisk. Vi anvender da følgende utvidelse av Brianchons setning.

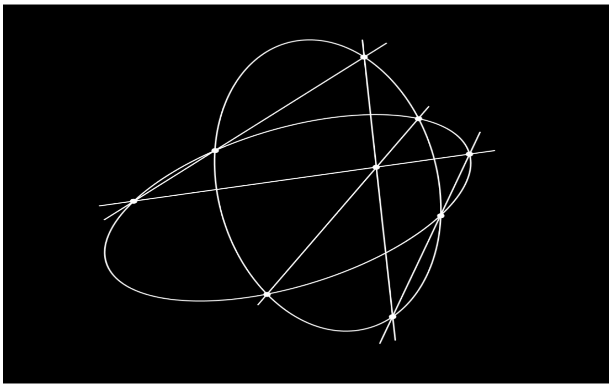
Bilde 36. *Gitt to kjeglesnitt som ikke skjærer hverandre, med to felles ytre tangenter. Vi legger et punkt på hver av tangentene, og fra disse punktene trekker vi tangenter til kjeglesnittene. Disse skjærer hverandre i to punkter hvis felles linje går gjennom det indre fellespunktet mellom kjeglesnittene. (Fig.5.9)*

Vi kaller denne setningen den duale projeksjonssetningen. Bildet går over til Brianchons setning når et av kjeglesnittene går sammen til punktpar.

97. Vi studerer figur.5.10 for å se hvordan setningen over gir fortsatt projeksjon. Vi har her tre linjer a, b og c. Fra punktet P trekker vi linjen p, og den fører punktet A på linjen a, til punktet B på linjen b. Vi legger så en tangent q på ellipsen Q, og denne fører B til punktet C på linjen c. Denne sammensatte operasjon resulterer i at punktet A går til punktet C. Dette kan imidlertid gjøres ved tangenten r på ellipsen R. Men dannelse av linjene r på dette vis er en innhyllingskonstruksjon av R med basis i den duale projeksjonssetningen. Dermed er vist at et en sammensetning av en perspektivisk avbildning og en projeksjon blir en ny projeksjon.



Figur 5.10: Projeksjon

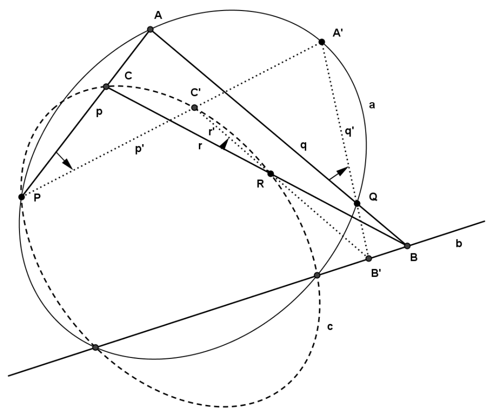


Figur 5.11: Projeksjonssetningen

98. De samme overveielsene kan vi gjøre i det duale tilfellet. Vi anvender da en utvidelse av pascals setning:

Bilde 37. *Gitt to kjeglesnitt som skjærer hverandre i fire punkter. Gjennom to av skjæringspunktene trekker vi linjer, og disse skjærer hvert av de to kjeglesnittene i et ytterligere punkt. Vi trekker linjer gjennom skjæringspunktene på hvert av kjeglesnittene, og de to linjene møtes da på diagonalen mellom de kjeglesnittenes andre skjæringspunkter.*

Vi kaller dette bildet projeksjonssetningen. vi begrunner nå denne projeksjon helt dualt til fremstillingen ovenfor.



Figur 5.12: Linje projeksjon

99. Grunnen til at vi kaller setningen over projeksjonssetningen, og den første den dual projeksjonssetningen er at vi er vant med å kalle linjebildene de duale. Dette prinsipp har vi også brukt for å sette navn på perspektivsetningene.

100. Vi kan se at Fig.5.12 hvordan den duale forløper. Linje p beveger seg om P, og disse projiseres til linjene q om Q via kjeglesnittet a. Videre projiseres linjene q til linjene r gjennom R via linjen b. Vi ser nå at linjene p kan projiseres direkte til linjene r via kjeglesnittet c. Dermed ser vi igjen at en kombinasjon at projeksjon og et perspektiv er en ny projeksjon. (Linjen QR som treffer skjæringspunktet mellom de to kjeglesnittene er ikke tegnet inn fordi den ikke spiller inn i konstruksjonen.)[2]

101. I alt har vi sett på fire ulike setninger i denne sammenhengen. Det er perspektivsetningen og den duale perspektivsetningen, og projeksjonssetningen og den duale projeksjonssetning. Disse er som de tidligere fremsatt rent fenomenologisk, som gitt. Men ved disse som utgangspunkt har vi kunnet bestemme de andre bildene og ulike relasjoner. Vi skal fortsette denne vei, og se hvordan nye generelle bilder oppstår som forklarer nye sammenhenger.

[2]At en direkte kombinasjon av to projeksjoner gir en ny projeksjon kan også vises geometrisk. Dette forutsetter et teorem som ligger utenfor de vi behandler. Setningen er: Gitt tre kjeglesnitt A, B og C med tre felles punkter. To og to av disse har et ekstra felles punkt som vi kaller AB, AC og BC. Vi trekker en linje gjennom AB, og der linjen treffer A trekker vi linjen til AC, og der den treffer C trekker vi linjen til BC. De to linjene møtes da på C. Denne setningen er også en spesialisering av tredjegradsetningen.

Kapittel 6

Imaginære elementer

Et avgjørende skritt innen aritmetikken og algebraen ble tatt da man tok på alvor de såkalte imaginære tallene. Ved løsning av annengradsligningen hadde man støtt på løsninger med negativt tall under rottegnet. Disse tallene opplevde man at ikke hadde noen mening; det finnes ikke tall som multiplisert med seg selv blir negativt. Man kalte derfor disse løsninger uegentlige eller imaginære, og så i alminnelighet bort fra dem. Så var tiden moden nok til at man innførte et symbol i, som multiplisert med seg selv blir -1. Det viste seg så at utrykk som inneholdt dette element også kunne behandles, og regneregler for dette ble utviklet. Selv om man ikke kunne forestille seg de imaginære tallene, fikk man abstrakte regler som gjorde at de likevel kunne behandles.

Denne tenkemåte ville Poncelet gjøre gjeldende også innen geometrien. På samme måte som man i algebraen behandlet uvirkelige elementer, og etter hvert regnet dem som selvfølgelige i et utvidet tallsystem, slik ville han også behandle en utvidet geometri som også inkluderte imaginære elementer. Slik som en annengradsligning alltid har to løsninger når man også tar med komplekse løsninger, slik har også to sirkler også alltid to felles punkter mente han. To sirkler som skjærer hverandre har to reelle punkter felles, ved tangering faller punktene sammen, og når sirklene ikke skjærer hverandre har de to imaginære punkter felles.

I forlengelsen av dette hevdet Poncelet det såkalte *kontinuitetsprinsipp*, et prinsipp som allerede Carnot hadde anvendt. Essensen i dette prinsipp er at alt som finnes i et geometrisk bilde fortsetter å være der selv om bildet forandrer seg. Har vi for eksempel to kjeglesnitt som skjærer hverandre i fire punkter, da vil de alltid gjøre dette hvordan de enn ligger. De fire skjæringspunktene er alle reelle når kjeglesnittene går helt over hverandre. Når de fjerner seg fra hverandre kan de få to reelle skjæringspunkter, og da vil to av skjæringspunktene være imaginære. Når kjeglesnittene ligger helt utenfor

Figur 6.1: Poncelet

hverandre blir alle fire punktene imaginære.
Det viste seg at det ikke var så liketil å trekke inn imaginære geometriske elementer som det hadde vært å innføre imaginære tal. Flere hevdet at slike elementer ikke finnes; når to sikler ikke skjærer hverandre, da kan man ikke tenke seg noen slags usynlige punkter et eller annet sted som man ikke ser. Dette syn ble opprinnelig hevdet av Cauchy, og ble gjentatt av flere. Flere hadde imidlertid en annen oppfatning, steiner Von Staudt. Vi skal komme tilbake til disse betraktningene, men først se på hvordan antagelsen av imaginære elementer opptrer.

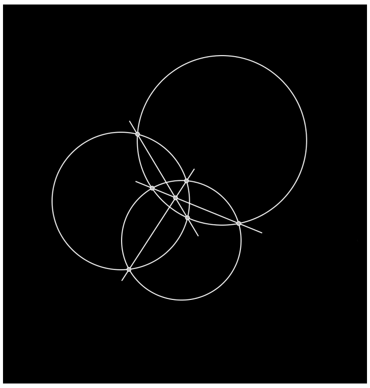
6.1 Imaginære punkter

102. Innføringen av sirkelpunktene begrunnes på en lignende måte som antagelsen av elementer i uendelig. Selv om disse ikke viser i konfigurasjonene, har de en virkning i det vi har for oss. Mange sammenhenger i geometrien blir forklarlige ved at det som trer oss reelt i møte, er forbundet på imaginært vis. For straks å få dette tydelig vil vi se på et eksempel knyttet til sirkler. Videre skal vi se på hvordan sirkler kan forstås som bestemte kjeglesnitt ut fa imaginære elementer.

103. Vi begynner med en sentral sirkelsetning.

Bilde 38. *Gitt tre sirkler som skjærer over hverandre gjensidig. Gjennom skjæringspunktene til to og to av dissetrekker vi diagonaler, og disse tre vil møtes i samme punkt. (Fig.6.2)*

Denne setningen har flere implikasjoner som vi vil se etter hvert. Vi kaller den tresirkelsetningen.



Figur 6.2: Sirkel setninger

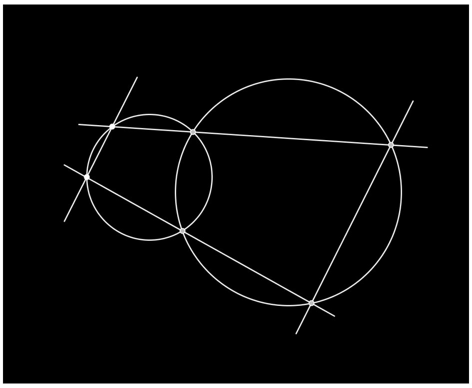
104. Tresirkelsetningen som bilde kan vi variere ved å endre på sirklenes posisjon og størrelse. Det kan da hende at to av sirklene ikke lengre skjærer hverandre. Det viser seg at disse sirklenes felles diagonal fremdeles kan finnes som et reelt element. Vi nærmer oss dette ved følgende betraktning: Gitt to sirkler som ennå skjærer hverandre. Vi lar en tredje sirkel skjære de to, og finner diagonalene mellom denne og de to. Diagonalene vil møtes på diagonalen mellom de to første ut fra setningen over. Legger vi en ny sirkel over de to opprinnelige sirklene, kan vi finne to nye diagonaler som møtes på diagonalen mellom dem. Vi har dermed to punkter på denne diagonalen, og kan dermed trekke denne uten å benytte skjæringspunktene. Når vi gjør dette ser vi at diagonalen går gjennom disse punktene.

105. Den samme konstruksjon kan vi utføre ved å starte med to sirkler som ikke skjærer hverandre. Ved å ha nye sirkler som skjærer denne, kan vi finne punkter på deres felles diagonale akkurat som over, og vi kan derved trekke diagonalen. Vi kan stadfeste dette ved å finne mange punkter på diagonalen.

106. Det vi har for oss her er et eksempel på kontinuitetsprinsippet, det som gjelder i det reelle tilfellet gjelder også når bildet blir endret. I det siste tilfellet har imidlertid skjæringspunktene mellom sirklene forsvunnet, men vi sier nå at de er blitt *imaginære*. Abstrakt sier vi alltid det samme; to sirkler har to felles punkter, og en felles diagonal.

6.2 Sirkelen

107. Ved å ha med i betraktningen imaginære punkter vil vi se at sirkelen kan begrunnes på en lignende måte som parallelle linjer. Ennå har vi jo ikke fastsatt sirkelen som geometrisk element; den grunnleggende definisjon



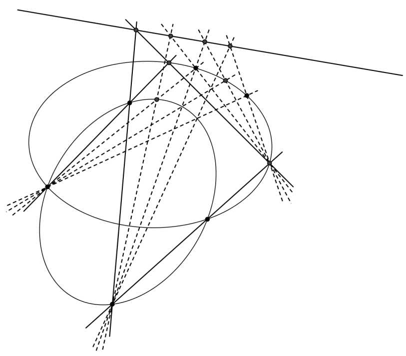
Figur 6.3: Sirkel setning

av sirkelen er i utgangspunktet metrisk; den er det geometriske stedet for alle punkter som ligger like langt fra en gitt sirkel. Hvordan bestemmes den rent geometrisk? De andre kjeglesnittene kan også bestemmes metrisk, men vi har sett at de også fremkommer rent geometrisk, og at de bestemmes som særskilte ved sitt forhold til linjen i uendelig. Hvordan er det så med sirkelen, kan denne også oppstå ut fra rent geometriske betraktninger? Dette spørsmålet skal vi forsøke å besvare.

108. Det første vi kan bli var er at sirkelen skiller seg fra de andre kjeglesnittene ved at to sirkler maksimalt kan ha to skjæringspunkter, mens de andre kjeglesnittene kan ha fire skjæringspunkter med hverandre. Dette gjelder både ellipser, parabler og hyperbler, og også kjeglesnittenes skjæring med sirkler. Men kjeglesnittene kan også ha ferre skjæringspunkter, når de bare går inn i hverandre har de to skjæringspunkter, og ligger de helt utenfor hverandre ser vi ingen felles punkter. Vi skal granske de ulike muligheter nøyere siden, men ser intuitivt at to kjeglesnitt i alminnelighet at har fire skjæringspunkter med hverandre, hvorav noen kan ha falt sammen, eller blitt imaginære.

109. Tenker vi nå sirkelen som et spesielt kjeglesnitt og finner at to sirkler aldri har mer enn to skjæringspunkter felles, da er det naturlig å spørre: hvor er de andre skjæringspunktene er blitt av? Siden vi ikke kan finne mer enn to reelle skjæringspunkt må to av dem være imaginære, men hvordan skal vi forstå dem? Her blir vi hjulpet på vei av et bestemt teorem som viser oss sirkelens sammenheng med parallelle linjer.

Bilde 39. *Gitt to sirkler som skjærer hverandre, og en linje gjennom hvert av skjæringspunktene. Sirklene skjæres hver i et par punkter av disse linjene, og linjer gjennom punktene blir parallelle.(Fig.6.3)*



Figur 6.4: Fellesdiagonal

Vi kaller denne setningen for parallell setningen.

110. Denne sammenhengen finnes ikke for kjeglesnitt generelt. Men projeksjonssetningen (Bilde **??**) fra forrige kapittel beskriver noe lignende. Her har vi to kjeglesnitt, og trekker linjer gjennom to av skjæringspunktene. Disse møter kjeglesnittene i to punkter hver, og linjer gjennom disse blir ikke parallelle men møtes på diagonalen gjennom de andre punktene.

111. Vi lar nå de to kjeglesnittene skjære hverandre i bare to punkter. Som over trekker vi linjer gjennom skjæringspunktene, og finner skjæringspunkter med ellipsene, og linjene gjennom disse møtes i et punkt. Vi kan jo ikke i dette tilfelle trekke noen diagonal, men gjentar vi prosessen vil vi se at alle punktene som dannes på denne måten ligger på en linje utenfor ellipsene. Dette er nå en diagonal gjennom de imaginære skjæringspunktene mellom ellipsene.

112. Forsøker vi på denne måten å finne diagonalen mellom to likeformede ellipser, det vil si to ellipser av samme form og retning, da vil vi ikke finne denne fordi linjene gjennom skjæringspunktene er parallelle. De to andre skjæringspunktene mellom disse vil dermed ligge på linjen i uendelig, og linjen i uendelig er da en diagonal mellom likeformede ellipser.

113. Ser vi igjen på situasjonen med sirklene, der linjene også blir parallelle, da blir vi klar over at diagonalen mellom de to sirkler også ligger i uendelig. Dette er jo en naturlig følge av det vi har sett, fordi alle sirkler er likeformede med hverandre. Dette vil altså si at to sirkler alltid skjærer hverandre i to punkter i uendelig, og at linjen i uendelig er en diagonal mellom dem.

114. Når alle sirkler har linjen i uendelig som felles diagonal, da sier litt overveielse oss at sirklene må ha de samme to imaginære punktene felles.

Dette innser vi ved å betenke at hvis tre sirkler skal ha felles diagonal, da kan de ikke ha mer en to punkter felles. Disse imaginære punktene i uedelig som alle sirklene har felles kalles *sirkelpunktene*.

115. Vi har dermed bestemt sirkler til å være kjeglesnitt som går gjennom to bestemt punkter i uedelig. Ut fra dette kan vi se hvordan kjeglesnittsetninger blir sirkelsetninger ved å legge punkter som sirkelpunkter, og omvendt, at sirkelsetninger kan generaliseres til kjeglesnittsatser der vi i stedet for sirkler har kjeglesnitt gjennom samme punkter. Ved dette kan en mengde spredte teoremer ses i et felles lys

116. Denne metodikk har vært vært gjenstand for vedvarende kontroverser; noen har hevdet gyldigheten helt ut, mens andre har vært dest mer kritiske. Vi skal se litt prisnipielt på disse spørsmål, men først se på noen umiddelbare konsekvenser av forholdet.

6.3 Trekjeglesnitt teoremet

117. I tresirkelteoremet har vi å gjøre med tre sirkler gjennom sirkelpunktene, og tre diagonaler mellom to og to av disse møtes i samme punkt. Lar vi nå sirkelpunktene i stedet være to vilkårlige punkter, vil disse bli felles for tre vilkårlige kjeglesnitt, og tre diagonaler møtes altså i samme punkt.

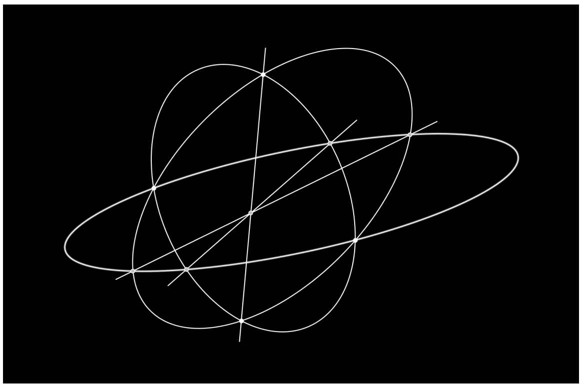
Bilde 40. *Gitt tre kjeglesnitt gjennom to felles punter. Da vil de diagonalene som dannes mellom kjeglesnittenes andre skjæringspunkter møtes i samme punkt.*

Vi kaller setningen trekjeglesnittsetningen, og vi skal se at den har mange viktige anvendelser. [1]

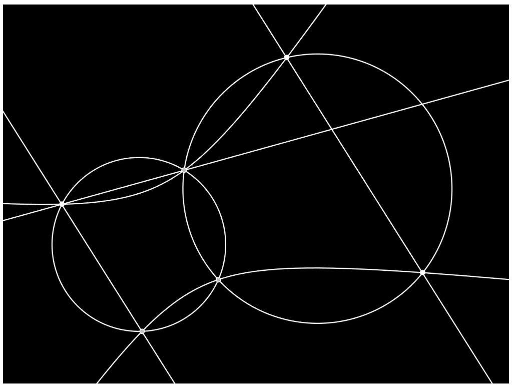
118. Vi har derved av det relativt spesielle sirkelteoremet funnet en setning av en langt mer generell karakter, og det inneholder flere setninger som muligheter. Når et av kjeglesnittene strekker seg ut og blir til et par linjer får vi projeksjonssetningen over, og når to kjeglesnitt blir to par linjer oppstår. Pascals setning.

119. I stedet for å la de to punktene felles for de tre kjeglesnittene være sirkelpunkter, lar vi punkter mellom bare to av dem bli dette. Da får vi to

[1] Denne setningen fremkommer også som et kroneksempel fra den algebraiske geometri. Gitt to tredjegradskurver som $f(x,y)=0$ og $g(x,y)=0$, skjærer hverandre i ni punkter. En lineær kombinasjon $h(x,y) = a\ f(x,y) + b\ g(x,y)$ er også en tredjegradskurve, og den må også være 0 i de felles punktene mellom f og g. Når hver av tredjegradskurvene degenererer til kjeglesnitt og linje har vi trekjeglesnittsetningen.



Figur 6.5: Tre kjeglesnitt



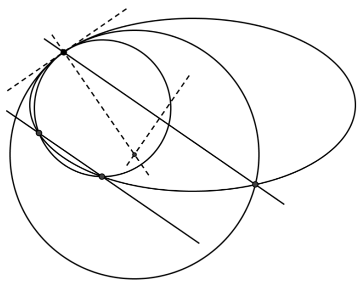
Figur 6.6: Generell parallell setning

sirkler, og det tredje kjeglesnittet går gjennom sirklenes skjæringspunkter. Diagonalen mellom de to sirklene er nå linjen i uendelig, og diagonalene mellom kjeglesnittet og sirklene må møtes på diagonalen mellom sirkelen, og blir dermed parallelle.

Bilde 41. *Gitt to sirkler som skjærer hverandre, og et kjeglesnitt gjennom skjæringspunktene. Diagonalene mellom kjeglesnittet og de to sirklene er da parallelle.(Fig)*

Dette er en viktig setning for konstruksjoner av ulik art, og noen av disse er gitt som oppgaver.

120. Setningen over gir en overraskende forbindelse til krumningsradien et kjeglesnitt. Forbindelsen finnes ved en modifikasjon av setningen over. Her går de to skjæringspunktene mellom sirklene sammen til et slik at det blir



Figur 6.7: Krumning

et punkt og tangerings mellom dem. Kjeglesnittet som går gjennom de sammenfalte punktene vil også tangere sirklene her og vi har:

Bilde 42. *Gitt et kjeglesnitt, og to sirkler som tangerer dette på samme sted, og som også skjærer over kjeglesnittet. Diagonalene mellom sirkelen og kjeglesnittet er da parallelle.*

121. Krumningsradien til et kjeglesnitt i et gitt punkt er definert som radien til den sirkelen som har et tredobbelt punkt felles med kjeglesnittet her. Har vi nå gitt sirkler som tangerer i et gitt punkt og varierer denne, da vil diagonalen mellom denne sirkelen og kjeglesnittet ha samme retning hele tiden. Endrer vi nå sirkelen slik at diagonalen også går gjennom tangeringspunktet, da har vi tredobbel tangering og den riktige sirkel. Vi kan finne den retningen ved en vilkårlig sirkel, og derfra kan vi finne krumningssirkelen. (Fig.6.7)

6.4 Generelle betraktninger

122. Vi ser allerede at ved å generalisere sirkelpunkter, og bevege seg frem og tilbake mellom imaginære og reelle punkter kan teoremer bringes sammen på de mest overraskende måter. Et spørsmål som oppstår er: er denne metoden streng nok; kan vi snakke om imaginære elementer som vi ikke ser på samme måte som reelle, og kan vi generalisere sirkelpunkter slik vi har gjort?

123. At de imaginære elementer ikke ble godtatt opprinnelig på lik linje med imaginære tall beror i første omgang på at tallene er mer abstrakte i sin karakter enn elementene i geometrien. Man er vant til å behandle tall abstrakt i algebraen, og her er man ikke avhengig å se for seg en bestemte størrelse

ved behandling av de ulike utrykk. Dette blir annerledes i geometrien, da denne i utgangspunktet er tegning og anskuelse. Man forbinder dermed de geometriske elementer med det man anskuer. Når så noen elementer blir i imaginære, da finnes de ikke lengre i anskuelsen, og det er vanskelig å forholde seg på samme måte til slike elementer som til imaginære tall.

124. Dette problem består i en eller annen form så lenge man tenker geometrien som det man anskuer. Tenker man seg geometrien som mer omfattende blir det annerledes. Geometrien fremtrer da for oss på ulike vis hvorav de geometriske bilder er de første. Her tegner og konstruerer vi, og danner oss et helhetlig bilde av situasjonen. Ved anvendelse av ligninger, som vi imidlertid ikke går inn på videre her, kan vi behandle også de imaginære elementer dirkete. Det vi vinner her tapes ved at vi ikke lengre har et bilde for oss. Geometrien *ytrer* seg dermed på dobbelt vis, på den ene side som anskuelig bilde, på den annen side algebraisk.

125. Den tredje måten er å behandle geometrien abstrakt rent begrepsmessig. På dette nivå er det da slik at for eksempel to sirkler alltid har to felles punkter. Vi kan betegne dette symbolsk ved $S_1 \cap S_2 = \{P_1, P_2\}$. Disse punktene kan være reelle, og da kan vi anskue dem i et geometrisk bilde. Ved tangering faller de sammen, og når sirklene ikke skjærer hverandre blir punktene imaginære. Da vil punktene ikke fremtre i bildet. Bildet, eller anskuelsen dekker således bare en del av geometrien, de imaginære punktene får vi ikke tak i her. Det samme gjelder jo elementene i uedelig som heller ikke nåes med anskuelsen.

126. Elementene i uendelig er ofte blitt kaldt "ideelle punkter", altså punkter man må tenke seg. På samme måte kan man betrakte de imaginære punkter, de er tenkte og viser seg ikke. Denne betraktning har sitt utgangspunkt i at man ser på den anskuede geometri som den virkelige, og i tillegg til disse virkelige elementene får man de ideelle. Betenker vi imidlertid de geometriske elementenes natur må vi si at alle geometriske elementer er ideelle. Noen av disse ideelle elementer kan vi forestille oss, andre kan vi bare tenke, men som vi skal se, etter hvert få en slags opplevelse av. Først når det blir klart at geometrien er noe mer enn det anskuelsen gir kan vi fritt forholde oss til den som helhet. Vi søker da ikke noen skjulte elementer, men sier at anskuelsen gir oss noe, resten må vi tenke og forholde oss til indirekte. Andre aspekter trer frem ved algebraisk behandling, og atter andre igjen ved den abstrakte behandling. Således trer geometriens ideer frem ved en mangesidig tilnærming.

127. I den anskuende geometri operer vi derfor på to nivåer. På den ene side har vi den abstrakte helhet eller ide som er virksom kontinuerlig, på den annen side det anskuede bildet som gir bildet, men som alltid fremtrer

spesielt. Vi kan ikke si at den egentlige geometri er den abstrakte, eller at den egentlige er den anskuede, begge sider hører med. Ved de abstrakte ideer griper vi noe som gjelder alle skikkelser, ved de mangfoldige anskuelser erfarer vi geometriens vesen i dens mangfoldigste skikkelser, vi arfarer dens bredde.

128. Det andre spørsmålet er om man kan generalisere sirkelpunktene. Dette kan vi ikke umiddelbart, men i vår behandling gjør vi det annerledes, vi antar fenomenologisk det som fremkommer av metoden, og vi ut fra det som oppstår se hva som kan begrunnes. Når det gjelder kjeglesnittsetningen over, lar vi denne gjelde som den mest generelle foreløpig, og slutter herfra til tresirkelsetningen og de andre setningene vi har funnet. Denne vei kan vi benytte videre; ut fra sirkelteoremer kan vi hypotetisk anta de generelle setningene, og slutte til andre forhold.

6.5 Virkning av sirkelpunktene

129. To sirkler i perspektiv kan også forstås i dette perspektiv. I de generelle betraktningen over kjeglesnitt i perspektiv så vi hvordan samsvarende linjer møttes på en av diagonalen mellom kjeglesnittene. Når vi har to sirkler i perspektiv da vil samsvarende linjer enten måtes på diagonalen mellom dem, eller de vil være parallelle. Det siste ser innser vi umiddelbart fordi en av sirklene kan forstås som en forskyvning av den andre. Ut fra dette ser vi også at sirklene har en felles diagonal i uendelig.

130. Det finnes en generalisering av to kjeglesnitt i perspektiv; vi kan ha tre kjeglesnitt mellom to linjer. Da vil tre diagonaler mellom to og to av dem møtes i samme punkt.

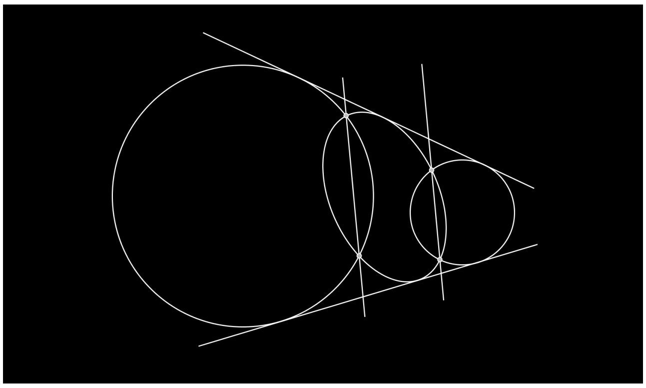
Bilde 43. Gitt tre kjeglesnitt mellom to linjer. Da finnes tre diagonaler mellom to og to av dem som møtes i samme punkt.

131. Denne setningen kan beveges i mange retninger. Ligger den ene av linjene i uendelig vil kjeglesnittene være parabler, og da har vi:

Bilde 44. Gitt tre parabler som tangerer samme linje. Da finnes tre diagonaler mellom to og to av dem som møtes i samme punkt.

Denne kan forvandles videre, og vi kan også finne flere forhold for hyperbler.

132. Vi ser nå hva som skjer om to av de tre kjeglesnittene mellom de to linjene er sirkler. Da kan den ene diagonalen være diagonalen mellom de to sirklene, og de vil diagonalene mellom kjeglesnittet og sirkelen møtes på denne. Når diagonalen mellom sirklene blir linjen i uendelig får vi:



Figur 6.8: Sirkler og ellipse

Bilde 45. *Gitt to sirkel og et kjeglesnitt som ligger mellom to linjer, slik at kjeglesnittet skjærer over sirklene. Da vil diagonaler mellom kjeglesnittet og sirklene være parallelle.*

6.6 Monges setning

133. Vi har gått den ene veien; fra generelle kjeglesnitteorem har vi funnet flere spesielle sirkelteoremene. Vi skal nå går den andre veien, og generalisere et sirkelteorem for å se hva som dannes av dette

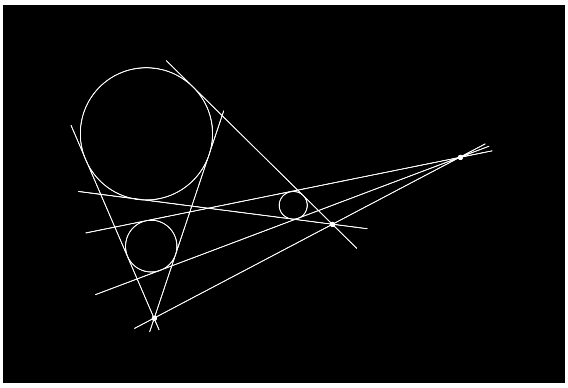
134. Monges setning er en sentral sirkelsetning, og på et vis dual til tresirkelteoremet. Her dreier det seg ikke om skjæringspunkter og diagonaler mellom to sirkler, men om *fellestangenter* og *fellespunkter*. De ytre fellestangentene til to sirkler møtes i det *ytre fellespunktet* til to sirkler, og de indre tangentene møtes i det *indre fellespuntektet*. Når vi har tre sirkler danner vi tre fellespunker, og vi har forholdeet:

Bilde 46. *Gitt tre sirkler og deres tre ytre fellespunkter. Disse ligger på samme linje.*

Setningen er en kjent egenskap ved såkalt homologi, eller likhetsbetraktning. Den kan også anvendes til appoloniuskonstruksjonen.(Opp..)

135. De tre indre fellespunktene til tre sirkler ligger derimot ikke på en linje, men det er slik at linjen mellom to indre alltid går gjennom et av de ytre fellespunktene.

136. En modifikasjon av Monges setning har vi når en av sirklene nærmer seg de andre. De indre fellespunktene ligger mellom denne og de andre, og ved tangering har vi:



Figur 6.9: Monges setning

Bilde 47. Gitt en sirkel som tangerer to andre. Da vil linjen gjennom tangeringspunktene gå gjennom et fellespunkt til de to sirklene.

Av denne setningen kan vi finne sirkler som tangerer to andre.

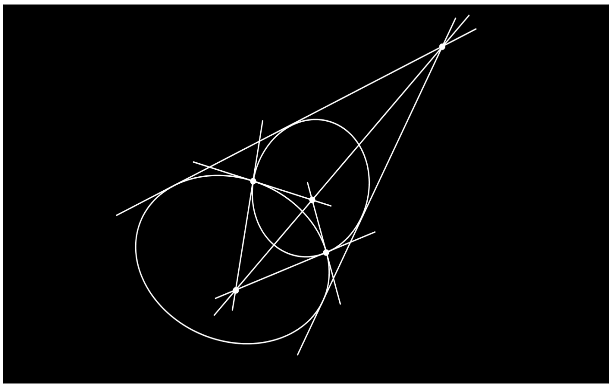
137. Når vi nå betrakter sirklene som spesielle kjeglesnitt gjennom sirkelpunktene, da fører det til en setning der vi har tre generelle kjeglesnitt gjennom to punkter.

Bilde 48. Gitt tre kjeglesnitt gjennom to felles punkter. Da vil de ytre tangentene mellom to og to møtes i tre fellespunkter som ligger på samme linje.

138. Det kan det være at vi ikke umiddelbart ser hvordan hvilke videre forvandlingsmuligheter som ligger i denne setningen. Betrakter vi den imidlertid nøyere ser vi at den er den duale til setningen med tre kjeglesnitt mellom to linjer. Her har vi jo dualt tre kjeglesnitt gjennom to punkter, og vi har tre fellespunkter på en linje, i motsetning til til tre diagonaler gjennom samme punkt. Siden vi har utviklet forskjellige forhold rundt trelinjesetningen, kan vi ved å dualisere finne forhold her. Vi skal ikke gjennomføre dette, men bare peke på noen sentrale momenter.

139. En sentral forvandling hadde vi ved at det ene av kjeglesnittene i L3 ble til linjepar gjennom perspektivpunktet. Hva er den duale prosess til dette? Vi tenker oss da det ene av kjeglesnittene gjennom punktparet som en ellipse som blir stadig smalere, men slik at den hele tiden strekker seg forbi de to punktene. Idet ellipsen klapper sammen, vil den gjøre seg gjeldende som to punter på linjen gjennom utgangspunktene.

140. Gjennomfører vi nå denne prosess i bildet over vil vi har to kjeglesnitt gjennom to punkter, og to puntker på diagonalen mellom dem, og dette gir setningen:



Figur 6.10: Spesialisering av generell Monge

Bilde 49. *Gitt to kjeglesnitt, en diagonal gjennom to av punktene, og to punkter på diagonalen. Vi trekker tangenter fra punktene til kjeglesnittene, disse danner punkter, og en linje her vil møtes på et fellespunkt til de to kjeglesnittene.*

Ut fra denne kan vi finne fellestangenter til to kjeglesnitt hvis vi har skjæringspunkter.

141. En ytterligere spesialisering fremkommer når de to punktene på linjene faller sammen med skjæringspunktene mellom kjeglesnittene:

Bilde 50. *Gitt to kjeglesnitt som skjærer hverandre i to punkter. Tangentene til hvert av kjeglesnittene i disse punktene danner to punkter som ligger på linje med et fellespunkt for kjeglesnittene. (Fig.6.10)*

6.7 Ordinær og projektiv sirkel

142. Når vi har funnet at sirkler slik vi kjenner dem kan forstås som kjeglesnitt som har felles punkter i uendelig, har vi ennå ikke konstruert sirklene ut fra dette. Vi så tidligere hvordan parabelen oppstod ved at vi regnet med linjen i uendelig, og konstruerte parallelle linjer. Vi kunne altså konstruere parabelen når vi kjente parallelle linjer, men er dette nok når det gjelder sirkelen? Det er det ikke. Like lite som vi kan vite hva faktiske parallelle linjer er uten metrikk, kan vi vite det når det gjelder sirkelen. Slik vi i betraktningen av Desargues setning så at vi må ha gitt to par parallelle linjer for å kunne si noe videre om disse, slik må vi ha to sirkler for å kunne si noe videre bestemt.

143. Hvordan kommer vi så fra den generaliserte sirkel tid den ordinære? Dette viser seg å ikke være mulig uten metriske betingelser, like lite som vi kan bestemme hva to virkelig parallelle linjer er uten metrikk. I den rene geometri må vi sette hva vi mener med et par parallelle linjer, og videre hva parallellitet i en annen retning er, når vi ikke har linjen i uendelig. Like lite har vi noen ordinær sirkel fordi de imaginære punktene i uendelig ikke er noe vi kan arbeide med reelt geometrisk. Når det gjelder det geometriske euklidske bildet kan heller ikke analysen hjelpe oss, vi vet ikke hav ortogonale linjer er uten å ha lært det fra verden. Det eiendommelige viser seg da, at de generelle geometriske bilder kan vi innse, det euklidsk må vi lære fra verden omkring oss.

6.8 Ulike grunnbilder

144. Reflekterer vi litt over de grunnleggende setningene vi har funnet, vil vi se at vi har tre ulike trekjeglesnittsetninger. Vi har den generaliserte tresirkelsetningen der vi finner diagonaler til tre kjeglesnitt gjennom to punkter. Så har vi sett på den generaliserte Monges setning, der tre kjeglesnitt gjennom to punkter hadde tre fellespunkter på samme linje. Videre har vi den duale til denne; nemlig tre kjeglesnitt som tangerer to linjer og har tre felles diagonaler gjennom samme punkt. Vi mangler imidlertid den duale til den utvidet tresirkelsetningen, og denne er gitt ved.

Bilde 51. *Gitt to linjer og tre kjeglesnitt mellom dem som ikke skjærer hverandre. Da vil fellestangentene mellom dem gi tre fellespunkter på samme linje.*

Vi ser umiddelbart at dette er en generaliserings av to kjeglesnitt i projektiv forbindelse. Denne fremkommer når et av kjeglesnittene over går sammen til en linje.

Kapittel 7

Brennpunkt og styrelinje

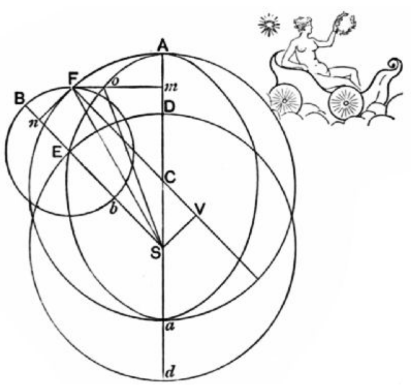
Brennpunktene danner så og si den andre annen slags inngang til kjeglesnittene. Ti nå har vi betraktet kjeglesnittene som snitt av kjegle og som projeksjon av sirkel, men like ofte, og ved elementær definisjon blir kjeglesnittet betraktet ut fra sine brennpunkter. Det at planetbanene er ellipser med solen i det ene brennpunktet peker på det sentrale ved brennpunktet. Planetbanene ble lenge ansett for å være sirkulære, eller komposisjoner av sirkulære bevegelser. Dette gikk tilbake til grekerne som mente at sirkelen var den perfekte form, derfor måtte himmelbevegelsene være sirkulære. Vi har da det merkverdige forhold at brennpunktet er nært knyttet sammen med sirklene, og dog på et slags polart vis.

7.1 Imaginære tangenter

145. Mens sirkler har sin rot i de imaginære punkter, har brennpunktene sin begrunnelse i imaginære tangenter. Imaginære tangenter er helt duale til imaginære punkter, og slik de imaginære punkter danner reelle diagonaler mellom kjeglesnitt, slik danner de imaginære tangenter reelle fellespunkter mellom dem.

146. For å finne diagonaler mellom to kjeglesnitt som bare hadde to fellespunkter anvendte vi projeksjonssetningen (37). Den duale konstruksjon er å finne fellespunktet mellom to kjeglesnitt som går inn i hverandre slik at vi bare har to fellestangenter. Vi kan da bruke den duale projeksjonssetningen (36) for å finne fellespunktet mellom dem. Vi legger punkter P og Q på de ytre tangentene, finner tangenter fra disse til kjeglesnittene, og linjer mellom skjæringspunkter vil da går gjennom det indre fellespunkt.

147. De to kjeglesnittene over har nå to felles imaginære tangenter, som møtes i et reelt punkt. Vi kan anvende dette på flere måter, men det vesent-



Figur 7.1: Keplers seier over Mars

lige som gjør at dette kommer til utrykk har vi når de imaginære tangentene går gjennom de imaginære sirkelpunktene i uendelig. Da inntreffer det bemerkelsesverdige; fellespunktene blir til det felles brennpunkt for kjeglesnittene. Brennpunktene som spiller en slik sentral rolle får dermed en elementær tolkning:

Definisjon 5. *Tangentene til et kjeglesnitt fra sirkelpunktene møtes i fire punkter, og disse kaller vi brennpunktene til kjeglesnittene.*

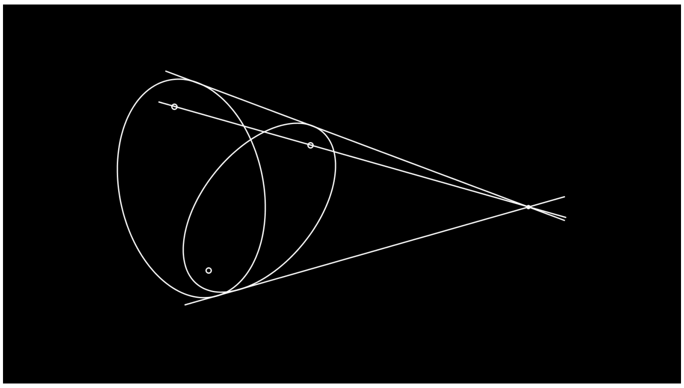
148. Når definisjonen står slik den står, fremstår det hele som abstrakt, men vi vil straks se virkningene av dette. Vi tar igjen for oss den duale projeksjonssetningen, men tenker bildet generelt. Vi lar nå P og Q på linjene være sirkelpunktene. De ytre imaginære fellestangentene danner da et felles brennpunkt for kjeglesnittene. I tillegg danner tangentene til hver av de andre kjeglesnittene et brennpunkt for hver av disse. Til slutt finnes to tangenter mellom kjeglesnittene, som godt kan være reelle i det generelle tilfellet. Vi har da bildet:

Bilde 52. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, de to andre brennpunktene, og to fellestangenter til kjeglesnittene. Da vil fellespunktet mellom tangentene ligge på linje med brennpunktene.*

149. Ved dette fremstår den duale projeksjonssetningene i en helt ny skikkelse. En variant av denne er det enkle bildet.

Bilde 53. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt som tangerer hverandre. Da vil tangeringspunktet ligge på linje med de andre brennpunktene.*

150. Parabler i samme retning har et felles brennpunkt i uendelig; noe som vi begrunner nærmere etter hvert, og det gir en variant av setningen over:



Figur 7.2: Brennpunkt

Bilde 54. *Gitt to parabler med samme retning som tangerer hverandre. Da vil tangeringspunktet ligge på linje med brennpunktene til parabelen.*

7.2 Like vinkler

151. Ved hjelp av setningen med to tangerende kjeglesnitt (53) kan vi vise et sentralt vinkelforhold til kjeglesnitt.

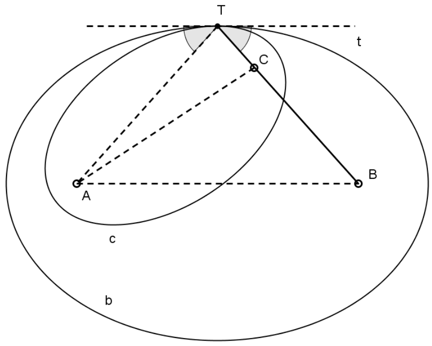
Metrisk lov 12. *Linjene fra de to brennpunktene til et punkt på periferien til et kjeglesnitt, danner like store vinkler med tangenten i punktet.*

Har vi gitt et kjeglesnitt c som vist på figuren (7.3), kan vi alltid finne et kjeglesnitt b med begge brennpunkt like langt fra tangenten. Ut fra symmetrien ser vi da at vinklene er like store.

152. Vi ser her at vi ut fra definisjonen av brennpunkt kan finne metriske egenskaper slik vi fra Pascals og Brianchons setninger fant ligninger og andre egenskaper for kjeglesnittene. Vi skal gå videre med dette, og finne sentrale forhold knyttet til lengder.

153. Vi tar nå utgangspunkt i perspektivsetningen (32). Her har vi to kjeglesnitt i perspektiv, to linjer fra perspektivpunktet, og to diagonaler mellom linjene og kjeglesnittene som møtes på perspektivlinjen. Vi lar fellestangentene være de imaginære tangentene gjennom sirkelpunktene; perspektivpunktet bli felles brennpunkter for de to kjeglesnittene, og vi får bildet:

Bilde 55. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og to linjer gjennom brennpunktet. Diagonaler mellom linjene og kjeglesnittene vil da møtes på diagonalen mellom kjeglesnittene.*



Figur 7.3: Like vinkler

154. En umiddelbar spesialvariant har vi når de to linjene faller sammen til en:

Bilde 56. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og en linje gjennom brennpunktet. Tangenter der linjen møter kjeglesnittene, vil møtes på diagonalen mellom kjeglesnittene.*

155. Før vi går videre må vi gjøre klart for oss noe bestemt; *for sirkelen faller alle brennpunkt sammen til et, og dette er sirkelens senter.* Dette innser vi ved å betenke at sirkelen går gjennom brennpunktene, og da vil tangentene fra disse punktene til sirkelen være de to tangentene i punktene. Disse møtes i et punkt, og dette er polen til linjen i uendelig, og dette har vi tidligere bestemt som senteret i sirkelen.

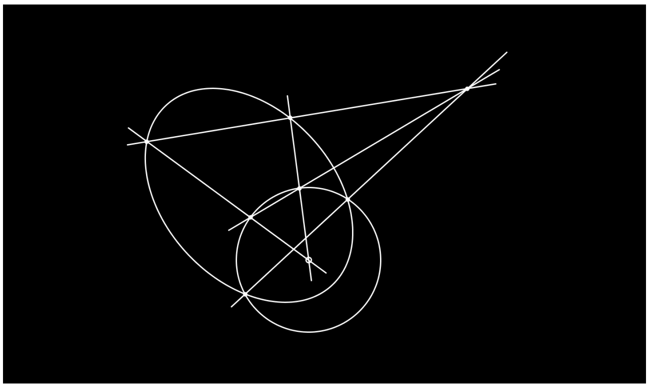
7.3 Metriske relasjoner

156. Den setningen vi vil anvende for å finne metriske egenskaper fremkommer når det ene av kjeglesnittene i bildet over (32) blir en sirkel.

Bilde 57. *Gitt et kjeglesnitt, et av brennpunktene og en sirkel med senter i brennpunktet. Vi trekker to linjer gjennom brennpunktet, og deres diagonaler med kjeglesnitt og sirkel, vil møtes på diagonalen mellom sirkel og kjeglesnitt.*

Siden vi kjenner sirkelen, kan i finne egenskaper ved kjeglesnittet.

157. Først ser vi på parabelens forhold til brennpunktet, og vil finne setningen:



Figur 7.4: Brennpunkt sirkel

Metrisk lov 13. *Fra alle punkter på en parabel er avstandene til brennpunktet og en bestemt linje, styrelinjen, den samme.*

Dette er kanskje den mest alminnelige setningen for parabler.

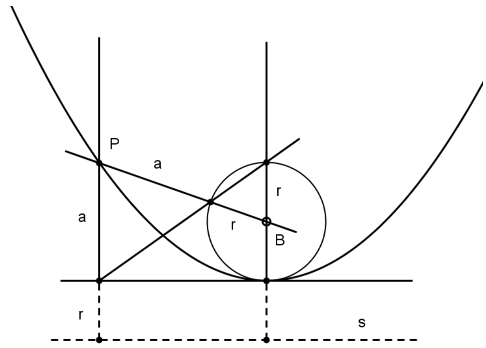
158. For å vise setningen lar vi kjeglesnittet i bildet over (57) være en parabel, og vi lar sirkelen med senter i brennpunktet tangere parabelen. Den ene linjen fra brennpunktet går gjennom tangeringspunktet og brennpunktet, mens den andre er fri. Den ene linjen møter parabelen i uendelig, og linjen herfra til det andre punktet på parabelen blir parallell med den første linjen. Vi trekker diagonal mellom sirkel og linjer, og den felles tangent mellom sirkel og parabel, og disse møtes i et punkt. Vi har da bildet på fig.(7.5). Her ser vi at avstanden fra brennpunktet B til punktet P, blir den samme som avstanden til en linje s. Her er s *styrelinjen* til parabelen og setningen over er vist.

159. Vi skal nå generalisere dette til å gjelde det generelle forhold mellom et kjeglesnitts brennpunkt og styrelinje. Dette er gitt ved:

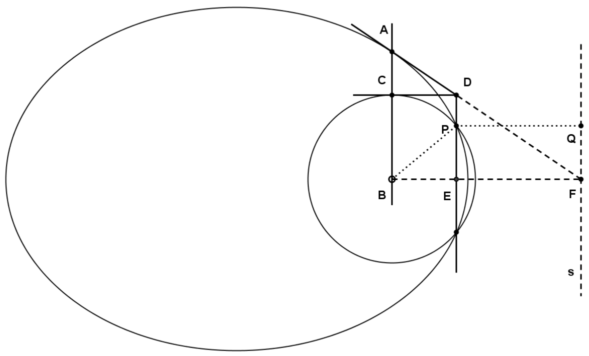
Metrisk lov 14. *Fra alle punkt på et kjeglesnitt er forholdet mellom avstanden til brennpunktet, og avstanden til en bestemt linje, styrelinjen, konstant.*

Dette forhold brukes ofte som elementær definisjon på kjeglesnitt fordi ved å variere konstanten er alle kjeglesnittene gitt. Er konstanten mindre enn 1, har vi ellipsen, er den lik en har vi parabel, og er den større en har vi en hyperbel.

160. Vi gjør en annen modifikasjon av sirkel-kjeglesnitt setningen (57) for å komme frem til dette forhold. Vi har en ellipse og en sirkel med senter i brennpunktet, men har lar vi de to linjene falle sammen til en som står



Figur 7.5: Brennpunkt parabel

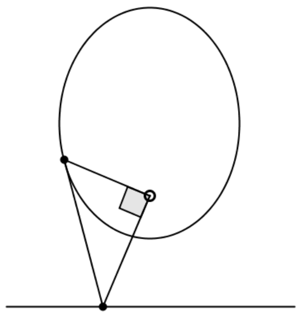


Figur 7.6: Forholdsetning ellipse

normalt på den lengste aksen til ellipsen, slik det fremgår av figuren (7.6). Der linjen møter sirkelen (A) og ellipsen (C) legger vi tangenter, og disse vil møtes på diagonalen mellom sirkelen og ellipsen i D. Linjen AD møter aksen i F, som ligger på normalen s, styrelinjen til ellipsen. Vi ser av figuren at BP er lik BC som er lik DE. Nå er forholdet mellom DE og EF lik forholdet mellom AB og BF som er konstant. Dette medfører at forholdet mellom BP og PQ også er konstant, og ved å variere sirkelens radius har vi det metriske forhold.

161. Ved å se at AD er en tangent til ellipsen inner vi at s er polaren til brennpunktet. Vi kan derfor definere:

Definisjon 6. *Styrelinjen til et kjeglesnitt er polaren til brennpunktet med hensyn på kjeglesnittet.*



Figur 7.7: Rett vinkel

162. Ved å la sirkelen minke, vil diagonalen mellom ellipsen og sirkelen flytte på seg, og idet sirkelen blir liggende inne i ellipsen vil diagonalen gå gjennom imaginære fellespunkter, og bli liggende på utsiden av de to. Denne linjen kan finnes ved å trekke linjer gjennom brennpunktet, og finne diagonaler mellom disse og sirkelen og ellipsen.

163. Vi vil så gjøre en ytterligere endring, og lar sirkelen bli stadig mindre slik at den til slutt faller sammen med brennpunktet. Dette lar seg ikke umiddelbart gjøre, fordi da forsvinner skjæringspunktene mellom dobbeltlinjen og sirkelen. Vi innser imidlertid at i grensetilfellet vil denne diagonalen bli en halveringslinje for vinkelen mellom de to linjene gjennom brennpunktet. Denne halveringslinjen vil da møte diagonalen mellom dobbeltlinjen og ellipsen på diagonalen utenfor ellipsen. Diagonalen er nå blitt styringslinjen til ellipsen.

Bilde 58. *Gitt en ellipse og et brennpunkt, og en dobbeltlinje gjennom brennpunktet. Diagonalen mellom dobbeltlinjen og halveringslinjen til dobbeltlinjen vil da alltid møtes på samme linje, som er styringslinjen til ellipsen.*

164. Denne kan ytterligere fortettes til en kjent setning.

Bilde 59. *Gitt en ellipse, et brennpunkt, og styringslinjen i forhold til dette brennpunktet. Vi trekker en linje gjennom brennpunktet, og en normal til denne i brennpunktet. Denne normalen vil da møte tangentene til ellipsen der denne blir skjært av den første linjen.*

Ut fra disse setningene kan vi også finne metriske setninger.

165. Vi ser ved dette at definisjonen av brennpunkt som skjæringspunkt mellom to tangenter fra sirkelpunktene stemmer overens med andre definisjoner

av kjeglesnittene. Vi skal senere se at også andre definisjoner ut fra brennpunktene lar seg påvise ganske direkte ut fra bildene som oppstår.

Kapittel 8

Absolutt kjeglesnitt

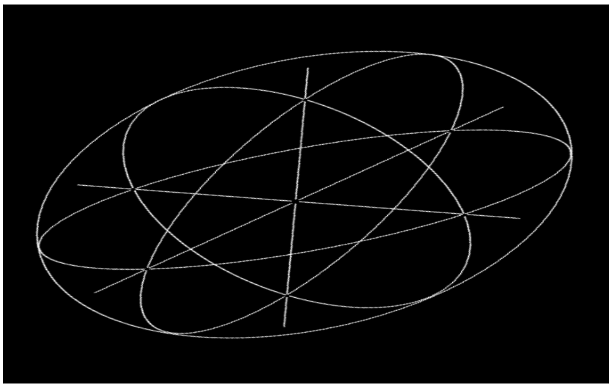
166. Utover på 1800-tallet vokste den projektive geometrien frem, og etterhvert også en algebraisk forståelse av den. Samtidig var det en annen type geometri som kom i dagen; den såkalte ikke-euklidske geometri ble utviklet av Labosjevki og Bolay. Også denne geometrien hadde sitt opphav omkring problemstillinger med parallelle linjer. Disse retninger fant en slags enhet ved at Cayley gikk videre med de metriske betraktninger gjort av Poncelet. Mens Poncelet skapte forbindelesen mellom metrisk geometri og projektiv geometri ved å innføre sirkelpunktene, ble dette generalisert av Arthur Cayley som ikke bare knyttet metrikk til sirkelpunktene, men til et vilkårlig kjelglesnitt; det såkalte absolutte kjeglesnitt. Denne betraktningsmåte spiller også en stor rolle i den rene genometri. Det imaginære kommer her inn en annen vei, og man får en intuitiv forståelse av den Euklidske geometris vesen som en spesiell utforming av geometri overhodet.

167. Vi skal i første rekke se på de rent geometriske betraktnigner knyttet til dette tema, og vise hvordan disse fremkommer naturlig fra de morfologiske bevegelser. I noen grad skal vi også se på metrikken; for å utdype temaet.

8.1 Salmons setning og dobbel tangering

168. Betraktningen vil dreie seg rundt bestemte utvidelser av teoremene vi har sett så langt. Vi danner en syntese av to og to av trekjeglesnitteoremene, men vi kan også ta utgangspuntk i Brianchons teorem som gir en vel så umiddelbar tilgang til dette.

169. Vi betenker at overagangen fra Pascals setning til Pappos setning skjedde ved at kjeglesnittet i konfigurasjonen ble til to linjer. Vi ser nå på tangentene i sekskanten i Brianchons setnign, og spør nå om disse kan betraktes som



Figur 8.1: Salmons setning

utartede kejglesnitt. Dette viser seg å være slik, og vi får da tre kjeglesnitt som dobbelttangerer et fjerde.

Bilde 60. *Gitt et kjeglesnitt, og tre andre som tangerer dette dobbelt mellom to og to av kjeglesnittene finner vi tre diagonaler, og disse vil møtes i samme punkt.*

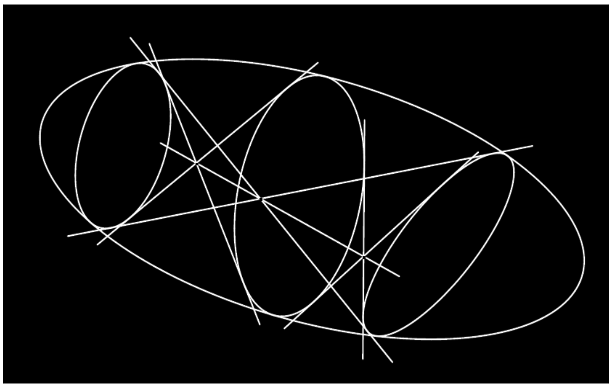
Vi kaller teoremet Salmons setning, fordi det er utrykkt eksplisitt i hans bok "Conic sections".

170. Her blir vi oppmerksomme på et nytt vesentlig moment; vi har med direkte relasjoner mellom kjeglesnittene å gjøre. Så langt har punkter eller linjer vært med som forbindene element i de ulike bildene, mens her er kjeglesnittene selv knyttet sammen ved dobbel berøring eller tangering. Hvis ikke misforståelser kan oppstå, vil vi kort si at to kjeglesnitt tangerer hverandre når de tangerer hverandre dobbelt.

171. Vi vil kalle det sentrale kjeglesnittet det *primære kjeglesnittet*, og de tre andre *sekundære*. Dette gjør vi ikke for å fremheve noen verdi for så vidt, men fordi de fremkommer i denne rekkefølge.

172. Salmons teorem er en syntese av to trekjeglesnitteorem. Det blir til et av de fire sentrale ved at det primære kjeglesnittet klapper sammen til et dobbeltpunkt, og det blir til et annet ved at det primære blir til en dobbeltlinje.

173. Den duale til Salmons setning kan også dannes, og dette skjer ved at vi bytter skjæringspunkt og diagonaler med fellestangenter og fellespunkt. Da har vi setningen.



Figur 8.2: Dual Salmon

Bilde 61. *Gitt et kjeglesnitt, og tre andre som tangerer dette. Vi finner tre par fellestangenter for to og to kjeglesnitt, og disse vil ligge på samme linje (Fig.8.2).*

174. Dette teoremet blir til de duale av Salmonsforvandlingene.

175. Lar vi de tre kjeglesnittene i dual Salmon ligge inne i et fjerde, men slik at de ikke berører hverandre, vil vi få Pascals setning når de tre kjeglesnittene blir stadig smalere, og til slutt faller sammen til tre linjestykker som gjør seg gjeldende som tre par punkter. Denne prosessen er duale til den som finner sted når Salmons teorem går over til brinachons setning.

176. På samme måte som Salmons teorem gjorde seg gjeldende i en dobbeltpunktvariant, og en dobbeltlinjevariant, kan vi her danne de duale tilfellene.

Bilde 62. *Gitt tre kjeglesnitt som tangerer to linjer. Da vil tre diagonalpunkter mellom dem ligge på en linje.*

Når det ytre kjeglesnittet blir dobbeltpunkt oppstår:

Bilde 63. *Gitt tre kjeglesnitt gjennom tre punkter. Da vil tre diagonalpunkter mellom to og to av kjeglesnittene ligge på samme linje.*

Denne setningen blir til Monges setning når de to punktene blir sirkelpunkter.

Bilde 64. *Gitt tre sirkler, og de ytre fellestangenetene til to og to av sirklene. Da vil de tre fellespunktene til tangentene ligge på samme linje.*

En rekke andre forvandlinger kan finne sted, og flere av disse er gitt som oppgaver under

177. Før vi ser hvordan dette går til må vi rette oppmerksomheten mot diagonalene igjen. Når to kjeglesnitt skjærer over hverandre, er det mulighet for å trekke i alt seks diagonaler. Det er imidlertid bare to av disse det kommer an på, det er de to diagonalene som gjenstår når de to kjeglesnittene som er knyttet til det primære, blir til to par linjer. Det dannes seks slike diagonaler, og de vil møtes tre og tre i fire puntker. I hvert bilde vil vi bare ha med tre diagonaler å gjøre.

178. Vi har dermed to hovedfremtoninger av Salmon; i det ene tilfellet omslutter de sekundære denne, i det andre ligger de inni. Vi skal snart se at hvert av disse utrykkene kan differensieres i to ulike bilder.

179. Salmon kan også metamorfoseres ved at et eller flere av de sekundære kjeglesnittene fremtrer spesielt. De kan utarte til en eller to par linjer, og hver av disse vil gi opphav til særskilte bilder. Når kjeglesnitt blir to par linjer får vi for eksempel en selvdual setning som er en syntese av Pascal og Brianchons.

Bilde 65. *Gitt to gjeglesnitt som tangerer hverandre. På det indre kjeglesnittet legger vi på hver side et par tangenter, og vi finner to par punter på det ytre lengst fra det indre. Hvert linjepar møtes danner også selv punter, og vi trekker linjen mellom disse. To diagonaler mellom punktparene vil da møtes på denne linjen.*

Når det indre kjeglesnittet blir et punktpar oppstår Pascal, og blir det ytre et linjepar, har vi Brianchon.

8.2 Absolutt kjeglesnitt

180. Vi skal når bestemme en del egenskaper til kjeglesnittene ut fra det det primære kjeglesnittet som vi nå ser på som det absolutte. Dette får nå rollen som det bestemmende, og det vil slik erstatte både linjen i uendelig og sirkelpunktene. Kjeglesnittene som tangerer disse blir å betrakte som sirkler i et slikt system, og egenskapene ved disse sirkleneblir bestemt av dette. Vi skal se hvordan senteret for sirkleneblir bestemt, og egenskaper knyttet til dette.

181. Vesentlig for disse betraktninger er i de overganger som følger av at de sekundære kjeglesnittene enten faller sammen med det primære eller med hverandre. Da oppstår generaliserigenr av fellesdiagonalsetniger, og disse spiller stor rolle.

182. Vi ser først hva som skjer når et av de sekundære faller sammen med det primære. Vi holder da tangeringspunktene til dette fast, og lar det så endere

seg slik at det nærmer seg det primære. Vi ser da at diagonalene mellom dette og de andre sekundære etterhvert nærmer seg fellesdiagonalene mellom disse og det primære, og ved sammenfall av kjeglesnittene går diagonalene sammen med disse.

Bilde 66. *Gitt et primært kjeglesitt og to sekundære. Da vil fellesdiagonalene mellom det primære og de sekundære møtes på en diagonal mellom disse.*

Dette er analogt med det som finnes når det primære kjeglesnitt er linjepar.

183. Når to av de primære faller sammen har bildet et litt annet utseende.

Bilde 67. *Gitt et primært kjeglesitt og to sekundære. Da vil diagonalene mellom de to sekundære møtes på en diagonale mellom et primært og et sekundært.*

184. Når vi gjør de samme bevegelser med den duale Salmon, da fremkommer de duale bildene. Bildene kan oppstå ved dualisering, eller duale morfologiske prosesser. Vi går ikke detaljert gjennom dette, men skisserer de setningene som oppstår. De elementer som fremtrer her vil bringe lys over egenskaper ved sirkler"i et absolutt kjeglesnitt.

185. Vi gjør først bevegelsen der et sekundært kjeglesnitt faller sammen med det primære. Da må vi ta utgangspunkt i en modifikasjon av bildet på figuren. Vi har fortsatt tre kjegesnitt inne i et primært, men finner de ytre fellespuntker mellom det midterste og de to andre, og de indre mellom disse to. Disse ligger da på en linje. Vi lar så det midterste vokse slik at det etter hvert faller sammen med det primære. Da vil fellestangentene mellom dette og de to bli tangentene der de to tangerer det primære:

Bilde 68. *Gitt et kjeglesnitt, og to andre som tangerer dette innvendig, slik at de ikke skjærer over hverandre. Vi finner fellestangentene mellom det primære kjeglesnittet og de to andre, og disse møtes i to punkter. Linjen gjennom disse vil gå gjennom det indre fellespuntket mellom kjeglesnittene.*

186. Her har vi et grunnleggende forhold i et rom dannet av et absolutt kjeglesnitt. Vi sier nemlig at fellespunktene mellom det primære og de andre kjeglesnittene er deres sentre med hensyn på det absolutte kjeglesnittet.

Definisjon 7. *Fellespunktet mellom et kejglesnitt og et absolutt kjeglesnitt, kaller vi senteret til kejglesnittet med hansyn på det absolutte.*

Setningen over sier da at linjen mellom sentrene til to sirkler"vil gå gjennom deres indre fellespunkt. Dette er jo en elementær setning når det gjelder sirkler.

187. Nå betenker vi det duale element mellom det absolutte og de andre kjeglesnittene, nemlig diggonalene i tangeringspunktene. Disse er på et vis de duale sentrene til kjeglesnittene, og vi kaller dem *sentriks.*

Definisjon 8. *Diagonalen mellom et kejglesnitt og et absolutt kjeglesnitt, kaller vi sentiksen til kejglesnittet med hensyn på det absolutte.*

Den ene av setningene over utrykker da: Gitt to kjeglesnitt i et absolutt. De to sentriksene møtes da på diagonalen mellom kjeglesnittnene.

8.3 Imaginær tangering

188. Til forskjell fra fremstillingen vi har sett til nå der vi gikk inn på begrepene imaginære punkter og linjer, vil vi nå se på det vi kaller imaginær tangering mellom to kjeglesnitt. Vi starter også her med Salmons setning, og lar to av kjeglesnittene falle sammen til ett. Da vil diagonalene mellom dem falle sammen til en, og gå gjennom tangeringspunktene. Dette var en bevegelse vi har gjort tildligere ved behandling av pol og polare, nå gjør vi samme bevegelse der vi ikke har hatt utarting av noen kjeglesnitt. Vi oppnær setningen:

Bilde 69. *Gitt et kjeglesnitt og to andre som tangerer dette utvendig. Da vil diagonaler mellom de to kjeglesnittene måtes på fellesdiagonalen til to kjeglesnitt.*

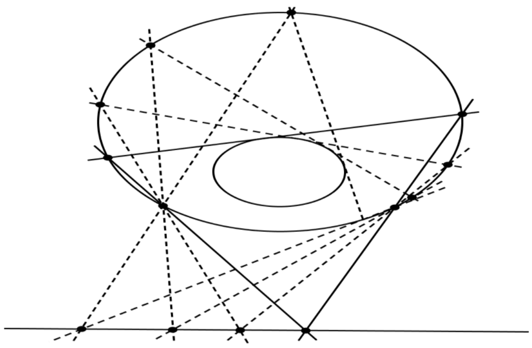
På grunn av symmetrien innser vi at begge fellesdiagonalene vil møtes i samme punkt som diagonalene.

189. Denne setningen kan forvandles til ny ved å la et av de ytre kjeglesnittene bli linjepar.

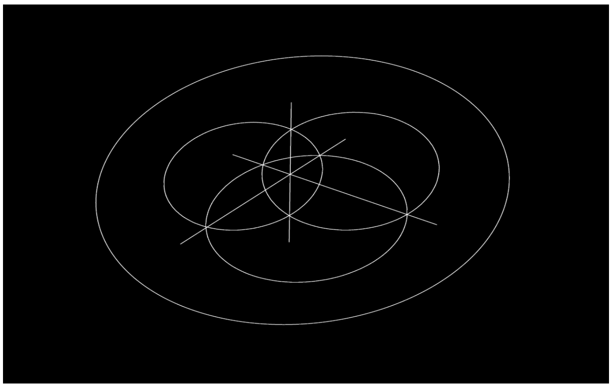
Bilde 70. *Gitt to kjeglesnitt som dobbelttangerer hverandre, og to tangenter til et av dem skom skjærer over det andre. Da kan vi finne diagonaler mellom dobbeltlinjen og kjeglesnittet, som vil møtes på fellespolaren til kjeglesnittene.*

Ved denne setningen kan vi konstruere et kjeglesnitt når et er gitt, og mer spesielt om en sirkel er gitt. Prosessen er den samme som omhyllningen ved Brianchons setning.

190. Ved å endre plasseringen til fellespolaren vil beliggenheten til det omhyllede kjeglesnittet endres. Vi lar fellespolaren nærme seg periferien til det omhyllende kjeglesnittet, og idet denne tangerier, vil vi ha firpunktstangering mellom dette og det kjeglesnittet som blir dannet. Når så polaren blir liggende utenfor det genererende kjeglesnittet vil ikke det omhyllede kjeglesnittet



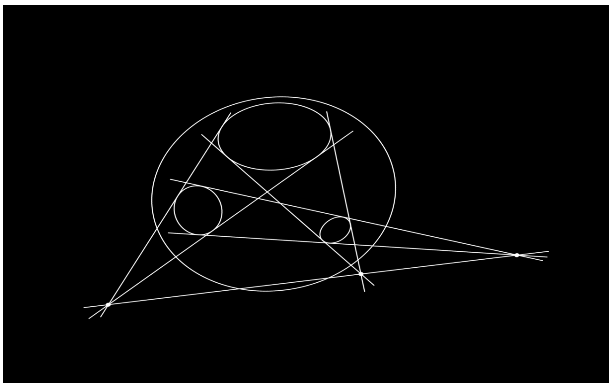
Figur 8.3: Imaginær tangering



Figur 8.4: Ellipse rom

berøre dette reelt, men nå oppstår imaginær tangering mellom dem. Fellespolaren blir altså liggende på utsiden, mens fellespolen ligger inne i begge kjeglesnittene.

191. Legger vi to andre kjeglesnitt inne i dette, og finner tre diagonaler mellom dem, da vil disse møtes i samme punkt. Det bildet vi har her minner mye om situasjone med tre sirkler, og det viser seg at alle kjeglsnitt som ligger inne i et annet på denne måten danner en mengde som er ekvivalent med mengden av sirkler. Mange av egenskapenene mellom sirklene kan vi gjenfinnen her; vi kan for eksempel anvende Gergonnes konstruksjon og finne ellipser i denne mengden som tangerer tre gitt. Imidlertid er ikke alle elementer ens. For eksempel vil ikke to diametre gjennom senteret til et slikt kjeglesnitt gi to parallelle linjer gjennom skjæringspunktene. Disse vil møtes på fellespolaren til Absolutten og det gjeldende kjeglesnittet. Vi har dermed



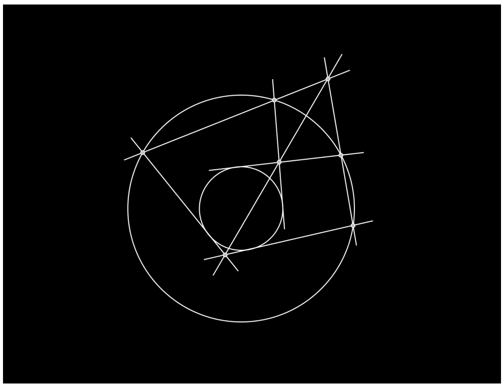
Figur 8.5: Generell Monges setning

en ikke-euklidsk sirkelgeometri, og vi kan overføre alle sirkelteoremer til en slik situasjon. Ved Cayleys metrikk kan også metriske forhold behandles.

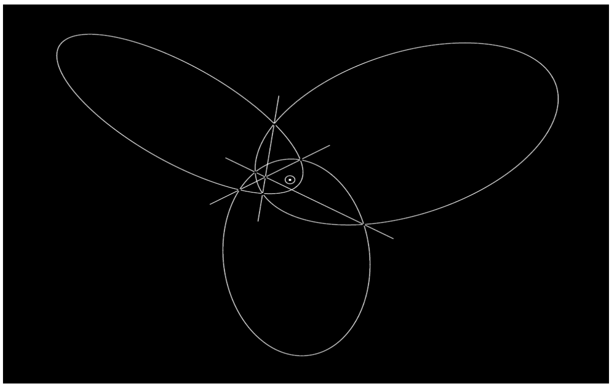
8.4 Dannelse av euklids geometri

192. Vi skal nå se på ulike hva som skjer når absoulten varierer. Dette var en av Felix Klein sine ideer, å se hvordan den Caylikse metrikk gikk sammen med ikke-euklidks metrikk i ulike sammenhenger. Slike transformasjoner er behandlet senere av Yaglom.

193. Vi skal nå se på tilfellet der det Absolutte kjeglesnittet er en sirkel, og hva som videre skjer når denne blir uendelig stor eller uendelig liten. I det første tilfellet gjør vi det slik at Absolutten ligger omkring de andre kjeglesnittet. Vi lar så det ene av disse kjeglesnittene bli liggende slik at senteret ligger sammen med absoluttens senter. Dette vil da bli konsentrisk med dette, og også en sirkel. Det ser vi ved konstruksjonen. Lar vi nå absolutten vokse utover, mens de andre kjeglesnittene blir liggende i ro, vil disse relativt sett etterhvert alle komme nærmere og nærmere senteret til sirkelen, og idet absolutten blir uendelig stor, vil alle de andre sirkelen bli konsentriske med denne, og dermed sirkler. Slik oppstår også alle sikler som mengden av kjeglensitt som tangerer en sirkel i uendelig. Rent geoemtrisk kan vi like gjerne sette denne som betingelse som sirkelpunktene.



Figur 8.6: To synsmåter sammen



Figur 8.7: Brennpunkt rom

8.5 Dannelse av mot-euklidsk geometri

194. Vi går nå den andre veien, og lar absolutten være en sirkel som tangerer kjeglesnitt imaginaært, men liggende inne i disse. Nå lar vi sirkelen minke, og lar den etterhvert falle sammen til et punkt. Da vil denne sirkelen være brennpunktet til alle de andre kjeglesnittene. Mengden av alle kjeglesnitt som har et felles brennpunkt danner dermed en geometri som er en salgs motpol til euklidks geomemtri.

195. Vi skal se at det er brennpunktet som er blitt dannet ved å se hvordan vi kommer frem til bildet i forrige kapittel hvorfra vi definerte brennpunktet. Vi starter da med en sirkel som ligger inne i to kjeglesnitt, og som tangerer disse imaginært. I tillegg har vi en hyperbel som tangerer sirkelen dobbelt reelt. Siden de tre kjeglesnittene alle berører sirkelen dobbelt, vil de ha tre diago-

naler som møtes i samme punkt. Vi lar så igjen sirkelen bli stadig mindre, og til slutt til et puntk. Kjeglesnittene som berører imaginært vil da ha punktet som brennpunkt, mens hyperbelen vil ha blitt stadig spissere, og tilslutt blitt til to linjer. Det bildet som er oppstått er det vi tok utgangspunkt i da vi definerte brennpunktet rent geoemtrisk.

196. Det kan også forekomme at to av kjeglesnittene blir linjepar. Det er da ikke så lett å bestemme diagonalen mellom dem. Hvis vi lar kjeglesnittene bli linjepar allerede mens brennpuntet er en sirkel kan vi se noe som gir mening. Vi legger da de to par linjene på sirkelen slik at de danner en rombe. Diagonalene i denne er halveringsvinkler mellom linjene. De to par linjer skjærer det tredje kjeglesnittet i to par punkter, og diagonalene gjennom disse vil da møtes på halveringslinjen. Når sirkelen blir brennpunkt har vi setningen:

Bilde 71. *Gitt et kjeglesnitt, et av brennpunktene og to par linjer, med samme vinkel mellom seg, gjennom brennpunktet. Linjeparene danner diagonaler med kjeglesnittet, og disse møtes på halveringslinjen mellom linjene.*

197. Når linjeparene faller sammen til enkeltlinjer har vi:

Bilde 72. *Gitt et kjeglesnitt, et av brennpunktene og to linjer gjennom brennpunktet. Tangentene der linjene møter kjeglesnittet møtes da på halveringslinjen mellom linjene.*

Denne setningen kan anvendes for å konstruere et kjeglesnitt innskrevet i en trekant.

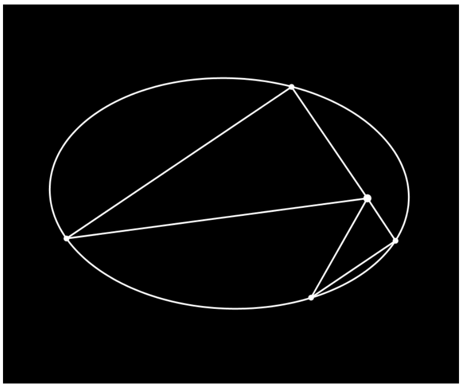
198. Ytterligere en variant av de doble par linjer har vi når en linje fra hvert par faller sammen.

Bilde 73. *Gitt et kjeglesnitt, et av brennpunktene og to linjer normalt på hverandre gjennom brennpunktet. Fra skjæringspunktene mellom kjeglesnittet og den ene linjen trekker vi nye linjer til et punkt på normalen. Disse vil da skjære kjeglesnittet slik at linjer herfra til brennpunktet slik at vinkelen mellom dem blir halvert av normalen.*

199. En siste variant som opptrer spesielt har vi når puntet på normalen går til uendelig.

Bilde 74. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt og en linje gjennom dette. Der linjen skjærer kjeglesnittet reiser vi normaler, og der disse skærer trekker vi linjer til brennpunktet. De to trekantene som nå er dannet er likeformede.*

200. En annen variant av denne har vi når begge par linjer faller sammen.



Figur 8.8: Likeformede trekanter

Bilde 75. *Gitt et kjeglesnitt, det brennpunkt og en linje gjennom brennpunktet. Der linjen skjærer kjeglesnittet legger vi tangenter, og disse møtes på normalen fra senteret.*

201. Disse tre møtes også på styrignslinjen til keglesnittet. For å se dette tar går vi tilbake til varianten der vi har et kjeglesnitt, en sirkel og to linjer gjennom brennpunktet. Da møtes diagonalene mellom sirkelen og kjeglesnittet, og disses diagonaler med linjeparet i samme puntk. Når lar vi sirkelen bli stadig mindre slik at den ikke lenger skjærer kjeglesnittet. Deres fellesdiagonal går utenfor begge, og idet sirkelen går sammen med brennpunktet blir diagonalen styrelinen. Samtidig vil diagonalen mellom linjeparet bli til en halveringslinje for vinkelen mellom linjene. Dermed har vi:

Bilde 76. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt og dens styrelinjer. Gjennom brennpunktet trekker vi to linjer, og en diagonal mellom linjeparet og kjeglesnittet vil møte en halverignslinje av vinkelen på styrelinjen.*

Fra denne setningen kan vi også finne forholdsetningen. Dette bunner i vinkelhalveringssetningen.

202. Når de to linjene faller sammen til en har vi:

Bilde 77. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt og dens styrelinjer. Gjennom brennpunktet trekker vi en linje, og der denne møter kjeglesnittet legger vi en tangent. Denne vil møte normalen til linjen gjennom brennpunktet på styrelinjen.*

Vi ser at dette er halvparten av setningen over, men her har vi også styrelinjen.

203. Vi kan finne mange teoremer i denne geometrien som svarer til sirkelteoremene, blandt annet tresirkelteoremet. Fra en synsvinkel sett er planetsystemet et slikt motromssystem der planetbanene tangerer solen imaginært. Interessant er det at at den kopernikanske vending også var å går bort fra systemer med sirkler, til systemer med kjeglesnitt gjennom samme brennpunt.

8.6 Galileisk geometri

204. Med bildet av alle kjeglesnitt med et felles brennpunkt kan vi gjøre enda en bevegelse. Vi kan la brennpunktet gå til uendelig. Da blir alle kjeglesnittene parabler i samme retning, og denne samlingen danner også en tredimensjonal geoemtri; Galileisk geometri, der også forhold fra sirkelgeoemtrien kan gjenfinnes.[1]

Bilde 78. *Gitt tre parabler med akser i samme retning. Da vil tre fellesdiagonaler mellom parablene møtes i samme punkt.*

205. Det kan vises hvordan alle egenskaper ved sirkelgeometri gjenfinnes i forvandlet form i den galileiske geometri. Det er imidlertid utenfor vår ramme å gå videre inn på disse geometriene; her skulle vi bare vise hvordan bilder fra den morfologiske geometrien gjenfinnes. Hovedmomentet fra vårt synspunkt er at morfologisk sett tilhører kjeglesnittene som setter rammene for de andre med i et helhetlig bilde. Elementene i et rom hører fra dette synspunt sammen med den helhet de inngår i. Forholdet mellom de ulike elementene vil bli enda tydeligere i neste kapittel.

Metrikk og absolutt kjeglesnitt

206. Metrikken i kan også følges fra det absolutte kjeglesnitt til de ulike spesialiseringene. Her skal gjøres noen betraktnigner over radier og deres forhold til hverandre.

207. Diameteren til et kjeglesnitt med hensyn på et absolutt kjeglesnitt er funnet å være dobbeltforhodlet som det danner med en linje gjennom senteret.

Definisjon 9. *Gitt et absolutt kjeglesnitt A og et kjeglesnitt C i dette. En linje gjennom senteret til C skjærer A i P og Q og C i S og T. Vi definerer da diameteren til C med hensyn på A til å være et dobbeltforhold som dannes mellom punktene.*

$$d = \frac{PQ \cdot TS}{QT \cdot SP} \tag{8.1}$$

[1] Yaglom har i sin bok gjort sammmenligninger mellom sirkelgoemetri og galileisk geometri, og også detsom han kaller hyperbolsk geometri.

Når man opererer innefor det generelle rom må man gjøre visse logaritmiske betraktnigner. Vi ser på uendelighetsforhold, og da forsvinner dette.

208. Når vi lar det absolutte kjeglesnittet vokse slik at det til slutt blir den uendelige sirkel, da vil kjeglesnittet bli sirkel. Dobbeltforholdet vil også vokse og gå mot uendelig. Betrakter vi imdilertid to sirkler ved siden av hverandre ser vi at de størrelsene som går til uendelig blir like store for begge sirklene, slik at forholdet mellom de to diametrene blir som forholdet mellom de ordinære diametrene.

209. Det er litt vilkårlig om man velger definisjonen over som diameter, eller om vi velger det inverse dobbeltforhold. I det tilfelle blir forholdet mellom diametrene forholdet mellom de inverse radier. Og det er slik at begge disse størrelser opptrer i geometriske sammenhenger. Vi ser på to, som vi også skal betrakte når sirkelen blir til kjeglesnitt.

Kapittel 9

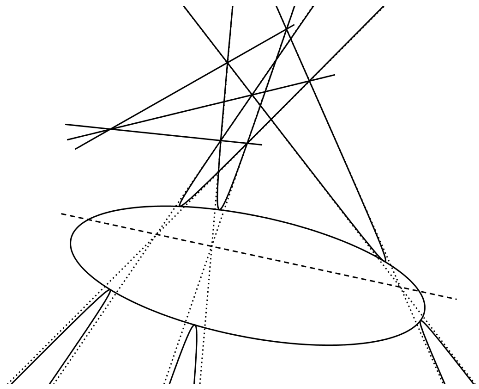
Kjeglesnitt typen

Ved den syntetisk sammenlignende prosess har vi nå bragt det så langt at vi kan knytte teoremer sammen i to omfattende teoremer. I Salmons teorem og det duale til dette ligger som mulighet alle de spesielle teoremene. Disse teoremene er imidlertid ikke allerede å forstå som grunnleggende bilder. Selv om det er mye symmetri i bildene er de ennå spesielle i fremtoningen; blant annet ved at de fremtrer dualt. Vi skal nå se på en syntese som også lar disse teoremene fremtre som ett; dette blir da urbildet eller typen til hele det fenomenområdet som er klarlagt. Typen vil fremstår med en symmetrisk struktur på en lignende måte som Desargues setning. Det forutsetter overgang av en bestemt art; og dette er nettopp en overgang som har med Desargues setning å gjøre.

9.1 Dannelse av Desargues setning

210. Vi har ennå ikke sett Desargues fremkomme morfologisk av andre setninger, men vi skal her se på denne overgangen. At en ren struktur av punkter og linjer kan fremkomme gjør seg jo gjeldene ved overganen til Pappos setning. Dette skjedde ved at kjeglesnitt ble til punktpar og linjepar. For at Desargues setning skal fremtre er en prosess av en noe annen art som vi ennå ikke har studert. Overgangen finnes på to duale vis.

211. Vi begynner med Salmons teorem, og knytter nå hyperbler til det primære kjeglesnittet. Vi begynner da med en langstrakt ellipse, og lar tre hyperbler dobbelttangere dette utvendig slik at den ene delen tangerer på oversiden, og det andre på undersiden. Vi lar videre hyperblene være smale slik at de skjærer hverandre på oversiden. Vi trekker diagonaler mellom to og to av hyperblene, og disse tre vil møtes i samme punkt. Dette gir seg ut fra Salmons setning, bare har vi nå med hyperbler i stedet for ellipser å gjøre. Vi



Figur 9.1: Overgang til Desargues

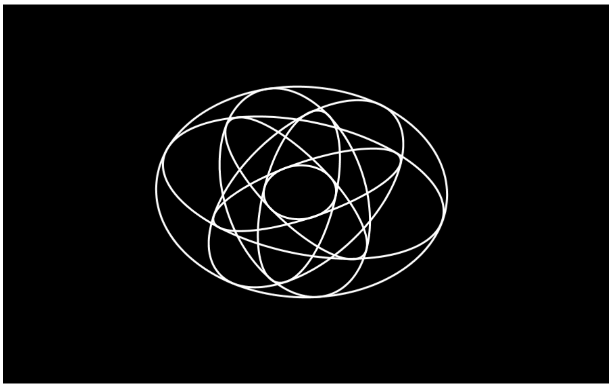
lar nå det langstrakte kjeglesnittet bli stadig smalere. Det fører til at hyperblene blir stadig spissere, og idet ellipsen faller sammen til en linje, vil de tre hyperblene bli til tre par linjer som skjærer hverandre på denne linjen. Når vi studerer nøyere den konfigurasjonen som er oppstått vil vi se at det er Desargues setning.

212. Dermed er også Desargues setning bestemt som en følge av Salmons teorem. Vi betenker nå at Desargues setning er selvdual, det er ingen forskjell i strukturen med hensyn på punkter og linjer. Det er derfor ikke til å undres over at også den duale setningen gir Desargues konfigurasjon. For å komme frem til dette gjør vi en dual operasjon.

213. Vi starter her med en ellipse og tre andre ellipser som tangerer denne utvendig. På hvert par av kjeglesnittene legger vi ytre fellestangenter, og de vil møte hverandre i tre tre punkter som ligger på samme linjen. Dette er en variant av det duale Salmon teoremet. Vi gjør nå den indre ellipsen stadig mindre, og lar de ytre følge denne; dog slik at lengden på de ytre er omtrent den samme. De ytre kjeglesnittene blir da stadig smalere, og idet den indre ellipsen går sammen til et punkt, vil de ytre ellipsene bli tre linjestykker gjennom punktet. Dannelsen som er oppstått er igjen Desargues konfigurasjon.

9.2 Den generelle typen

214. Vi ser dermed at Desargues setning er en spesialisering av begge de duale bildene. Ved å betrakte dannelsesprosessen vil vi kunne finne en syntese av de to. I det ene tilfellet hadde vi fire kjeglesnitt, og tre linjer gjennom et punkt.



Figur 9.2: Bilde på typen

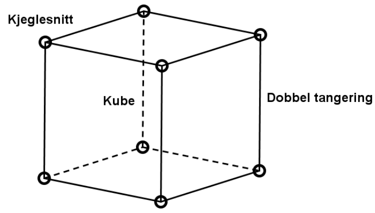
Av de fire kjeglesnittene ble det dannet tre par linjer med fellespunkter på en linje. I det andre tilfellet hadde vi fire kjeglesnitt og tre par linjer med fellespunkter på en linje, og dannet tre linjer gjennom et punkt. Vi ser altså at tre punkter gjennom en linje kan dannes av fire kjeglesnitt, og likeså kan tre par linjer med fellespunkter på en linje. Det er da nærliggende å spørre seg om de tre linjene gjennom samme punkt i Salmonkonfigurasjonen er fire degenererte kjeglesnitt. Likeledes kan vi spørre om de tre par linjene, og linjen gjennom fellespunktene også er fire degenererte kjeglesnitt.

215. Det viser seg at en slik syntese er mulig. De tre linjene gjennom et punkt i Salmonkonfigurasjonen lar seg løse opp til tre kjeglesnitt som tangerer et fjerde. De tre kjeglesnittene tangere hver de to de før var diagonal til. I det duale tilfellet løser det tre par linjene seg til tre kjeglesnitt som også tangerer to og to andre, og linjen løser seg opp til et kjeglesnitt som tangerer disse. Vi har dermed i alt åtte kjeglesnitt i konfigurasjonen, og kan skrive dette som en setning.

Bilde 79. *Gitt et kjeglesnitt A, og tre andre B, C og D som tangerer dette dobbelt. Videre tangerer tre nye kjeglesnitt E, F og G to og to av B, C og D. Da finnes et kjeglesnitt H som dobbelttangerer E, F og G.*

For å ha en retning i beskrivelsen kan vi også her ved behov kalle det første kjeglesnittet det primære, de tre neste de sekundære, og så de tre neste tertiære, og til slutt det kvartære.

216. Vi har dermed kommet frem til det fundamentale teoremet i denne fremstillingen, eller det vi kan kalle kjeglesnittypen. Det består av bare kjeglesnitt som dobbelttangerer hverandre i en bestemt struktur. Alle teoremene vi har sett på så langt finner sin rot i dette ene bildet. Bildet er helt symmetrisk, vi



Figur 9.3: Typens struktur

har å gjøre med bare kjeglesnitt, og hvert av kjeglesnittene dobbelttangerer tre andre. Dermed er vi kommet frem til et bilde av lignende art som Goethes Urplante der han anser at planten består av bare forvandlede blad. På samme måte er de ulike teoremene innenfor kjeglesnittgeometrien, sett i denne kontekst å betrakte som bilder der alle elementer er forvandlede kjeglesnitt.

217. Teoremet har en bestemt bygning som også viser at vi har med noe typisk å gjøre. Strukturen til åttekjeglesnitteoremet er kuben. Kjeglesnittene er representert ved hjørnene, forbindelsene mellom kjeglesnittene er representert ved sidene i oktaederet. Hele kjeglesnittstrukturen er representert ved kuben. Vi kan også si at kuben er grafen til typen, og at kjeglesnittene er de grunnleggende elementene.

9.3 Definisjon eller bevis

218. Gangen i undersøkelsene har vært å går fra bestemte teoremer, og gjennom visse syntetiske prosesser har vi funnet stadig mer generelle sammenhenger. Etter hvert som de generelle har fremkommet har vi undersøkt følger av disse setningene, og på dette vis har vi sannsynliggjort det som er funnet. Når vi kommer til typen som representerer et sluttpunkt innen undersøkelsene, da stopper vi opp og spør oss om hvordan denne skal forstås.

219. Opprinnelig ble kjeglesnittene definert som snitt av en kjegle, og ved betraktninger av denne kunne man finne andre fenomener knyttet til disse. Vi har imidlertid sett at mange setninger kan brukes som definisjon. Slik så vi Pascal og Brianchon begge gir implisitt definisjon, og vi har oppnådd at også forholdsetningen oppstår blant andre. Vi spør nå: kan typen brukes som definisjon på ellipsen?

220. Dette spørsmålet er fullt legitimt av flere grunner. Den ene grunnen er da denne. Hvilken definisjon av kjeglesnitt skulle vi satt først. Har vi gitt en definisjon kan andre utledes av denne, og velger vi andre kan tingene snues om. Når vi har sett at alle disse definisjonene fra denne synsvinkel er spesialtilfeller av typen, da kan det vurderes å sette denne først.

221. Vi kan også betenke hvordan Desargues setning først ble bevist på ulike vis, men etter hvert ble satt som aksiom. Dette viste seg å være setningen som ligger til grunn for andre, og ikke omvendt. På samme måte viser typen seg som en symmetrisk sammenheng som er årsak til mange andre.

222. Det lar seg gjøre å bevise setningen og varianter av denne algebraisk, men med dette går vi utenfor det anskuende geometriske område, og tar i bruk teknikker. Slik man kan være i det rent anskuende ideelt geometriske når det gjelder linje punkt, slik kunne man ville begrunne kjeglesnittlæren som sådan.

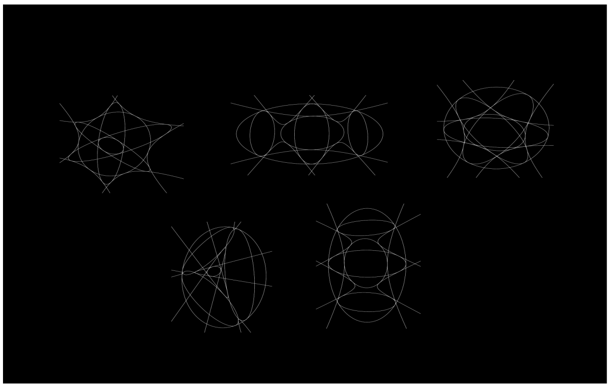
223. Det er således flere grunner som taler for å sette typen først, men da må vi spørre: er dette mulig. Hvilke bestemmelser må vi gjøre for å ha en gyldig begrunnelse for dette? Vi må derfor se på grunnbevegelsene en gang til, og se hva slags det kommer an på.

9.4 Kjeglesnitt begrunnet i typen

224. Det første vi sier definitorisk er at vi har en kurve som er bestemt ved at den på den ene siden blir til et par punkter, og på den andre siden til et par linjer. På den andre siden danner disse kurvene en kubestruktur.

- Kjeglesnitt er kurver som på den ene side utarter til to punkter, og på den andre siden til to linjer.
- Kurvene berører hverandre dobbelt, og har fem frihetsgrader.
- Kurvene inngår i en heksaederstruktur

225. Det viser seg at vi bare kommer et stykke på vei med dette, men vi kommer ikke til alle konfigurasjonene. Dette kan vi bli klar over bare ved å telle. Hvis for eksempel fire kjeglesnitt blir til punktpar, og fire til linjepar, da har vi bare åtte punkter og åtte linjer. I Pappos har vi ni av hver, og i Desargues ti av hver. Her kommer noe i tillegg, og vi skal etter hvert se på dette. Vi ser imidlertid først på hvor langt vi når med definisjonene over.



Figur 9.4: Varianter av hovedteoremet

226. En bestemt vanskelighet gjør seg gjeldende som ikke så lett overvinnes. Når vi følger prosessen: Vi starer med et kjeglesnitt, finner tre sekundære, videre tre tertiære, da finnes det akkurat et kvartært som tangerer disse tre. Problemet er nå at vi ikke abstrakt kan si hvor dette ligger. Vi må på sett og vis peke, vi kan ikke med ord si hvordan det vil ligge.

227. Vi når med definsijonene over bare til det som kalles Poncelets setning [1]. Vi starter med et primært kjeglesnitt, legger tre par linjer som berører dette, mellom to og to linjer finner vi punktpar, og gjennom de seks punktene som dannes går et kjeglesnitt. Dette kan utrykkes som:

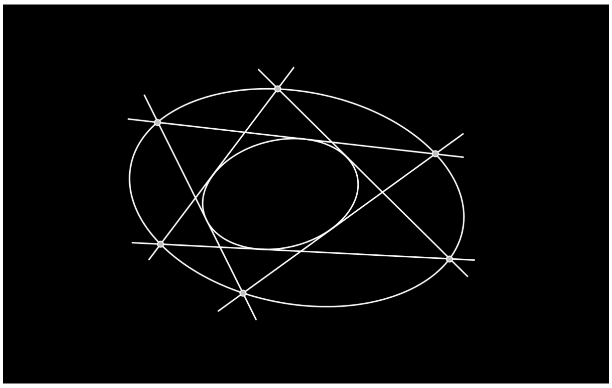
Bilde 80. *Gitt et kjeglesnitt som er innskrevet i to trekanter. Da finnes det et kjeglesnitt som omskriver trekantene.*

Dette kan også sies som; gitt en trekant som omskriver et kjeglesnitt, og et kjeglesnitt som omskriver trekanten. Da finnes en lineær mengde trekanter mellom de to.

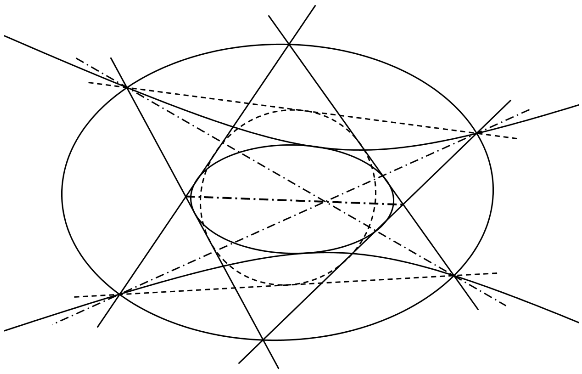
228. Her ser vi at det primære kjeglesnittet fortsatt er et kjeglesnitt, de tre sekundære er linjepar, de tertiære er punktpar, og det siste er ordinært kjeglesnitt igjen.

229. Ved bare å følge definisjonene vi har gjort kommer vi ikke lengre, det vil alltid være to kjeglesnitt i konfigurasjonen, og for eksempel Pascals og Desargues teoremer vil ikke fremtre. Vi skal se på hvilken forvandling vi må sette i tillegg til ren punkt og linjeforvandling av kjeglesnittene. Vi går da ut fra et bestemt teorem.

[1]Dette kalles Poncelets teorem, og gjelder for alle mangekanter; hvis en mangekant ligger mellom to kjeglesnitt, da finnes en uedelig mengde kjeglesnitt mellom disse.



Figur 9.5: Poncelets sats



Figur 9.6: Overgang mellom Poncelet og Pascal

230. Ved dannelsen av Poncelets setning ble de tre tertiære kjeglesnittene linjepar. Hvis vi nå beveger et av disse linjeparene, slik at det blir en hyperbel da oppstår en mellomvariant mellom Poncelets setning.

Bilde 81. *Gitt et kjeglesnitt og to linjer gjennom hvert av to punkter på periferien. Disse danner fire nye punkter på kjeglesnittet, og vi lar et kjeglesnitt gå gjennom disse fire punktene. Da vil kjeglesnittet og linjene innskrive et nytt kjeglesnitt. (Fig.9.6)*

231. Dette teoremet kan nå spesialiseres i to retninger. Vi ser av figuren (Fig.9.6 at når hyperbelen retter seg ut, og blir til linjepar, da vil det innskrevne kjeglesnittet følge med, og vi får Poncelets setning. Blir imidlertid hyperbelen spissere, slik at den etter hvert blir et linjepar som krysser konfigurasjonen, da blir den innskrevne ellipsen stadig smalere, og går så over til

å bli et linjestykke.

232. Det viser seg å være vanskelig å abstrakt avgjøre når det første tilfellet inntreffer, og når det andre finner sted. Foreløpig må vi si: *Ved forvandlign av et kjeglesnitt til to linjer kan de berørte kjeglesnittene fortsatt være kjeglesnitt, eller et av dem kan degenerere til et linjestykke der de to linjene møtes.* Dette må legges til definisjonene innledningsvis.

(Resten av kapittel ufullstendig)

9.5 Sammenfallende kjeglesnitt

233. En overveielse som kan gjøres før kjeglesnittene utarter til punktpar eller linjepar, er å se på kjeglesnitt som faller sammen. At elementer faller sammen har vi sett på i flere sammenhenger; nå vil vi forsøke å se dette ut fra typen.

234. Den første type sammenfall har vi når to sekundære kjeglesnitt berører det primære på *samme sted*. Vi forstår her intuitivt hva samme sted er. Ennå vil vi ikke beskrive dette ved hejlp av elementene punkt eller linjer, fordi disse ikke har oppstått ennå. Vi skal følge prosessen for å se hva som skjer med andre kjeglesnitt i tilknytning til dette.

235. Vi følger da det vi kan kalle den grunnleggende Fire-kjeglesnitt relasjon, et primært kjeglesnitt, to sekundære, og et tertiært. Når berøringsstedene mellom det primære og de to sekundære nærmer seg hverandre, ser vi at også at to berøringsteder mellom de sekundære og det tertiære nærmer seg dette sted. Ved sammenfall går de fire stedene sammen.

Aksiom 3. *Når to kjeglesnitt berører et tredje på samme sted, da vil alle kjeglesnitt som berører disse de to berøre dem på dette sted.*

236. Vi bestemmer dette rent ut fra kjeglesnittene. Hvis når det ene av de fire faller sammen til linjestykke, vil punktet ligge også ligge på dette sted, slik at kjeglesnitt som berører hverandre på samme sted,har et felles punkt på dette sted. Det duale skjer når vi får linjer, da får kjeglesnittene en felles tangent på dette sted. Vi har derfor: To kjeglesnitt som berører hverandre har et felles punkt og en felles tangent på berøringsstedet.

237. De grunnleggende sammenfalledne bevegelser kan vi også se på. Vi kan ha to slike bevegelser. Den ene har vi når to kjeglesnitt som tangerer hverandre faller sammen. Her vil det skje at og den grunnleggende sats som beskriver dette har vi ved: Variant1

Bilde 82*. Gitt et kjeglesnitt, og to par andre som tangerer dette i to par punkter. Et kjeglesnitt som berører de to, vil også kunne tangerer et som berører de andre to.*

238*.* En spesialvariant av denne har vi ved

Bilde 83*. Gitt et kjeglesnitt og to som tangerer dette, og en diagonal mellom disse. Gitt også to andre som tangerer det første i de samme puntkene som over. Det ene av disse skjærer diagonalen i to punkter. Hvis det andre går gjennom et av disse puntkene, går det også gjennom det andre.*

239*.* En variant som kan anvendes for å finne tangerende kjeglesnitt er gitt ved

Bilde 84*. Gitt et kjeglesnitt, og to andre som tangerer dette. Da vil det går et kjeglesnitt gjennom de fire tangeeringspunktene og to av skjærringspunktene.*

240*.* Den andre varianten av sammenfall har vi når to kjeglesnitt som begge tangerer et tredje faller sammen. I det siste tilfellet har vi en mellomvariant der kjeglesnittene berører det felles i samme punkt. Her vil deres felles kjeglesnitt også tangere i de samme punktene, slik at vi har i alt fire kjeglesnitt på samme tnageringsted.

Bilde 85*. Gitt tre kjeglesnitt som tangerer et fjerde i de to samme punktene, og et til som tangerer dette, men som skjærer over de tre andre. To kjeglesnitt som dannes mellom to og to av disse, vil sammen med det fjerde tangere enda et.*

9.6 Dannelse av linjer og punkter

241*.* Vi setter nå opp en modifikasjon av setningen for å se på den beveglese vi mangler. Vi lar da den ene paret linjer være kjeglesnitt, og ellers har vi det samme.

Bilde 86*. Gitt et kjeglesnitt, to par linjer og et kjeglesnitt som berører dette, mellom disse tre punktpar. Da finnes et keglesnitt gjennom punktene.*

242*.* Vi ser at hvis det sekundære kjeglesnittet blir linjepar oppstår Poncelsets setning. Lar vi i stedet det sekundære kjeglesnittet være en hyperbel som vi gjør stadig spissere, vil kjeglesnittet som det berører bli stadig smalere. Idet det ene kjeglesnittet blir til to linjer, vil det andre bli til en linje gjennom skjæringspunktene til de to par linjene, og også gjennom skjærignspunktet til det siste linjeparet. Bildet som nå er oppstått er Pascals setning.

243. Denne overgangen så vi også i forbindlese med Desargues setning, og den er ikke innebygd i de definisjonene vi har gjort så langt. Hvordan skal vi beskrive denne overgangen? Før vi går endelig inn på dette vil skal vi se på noen andre overganger som ikke faller inn under våre definisjoner så langt.

244. Vi starter da med

245. Med dette gjør vi to ting. Vi er i den utviklende metode, og ser hvordan typen gjør seg gjeldene i ulike situasjoner. Det andre er at vi også følger en naturvitenskaplig metode. Når man generaliserer eller innfører en ny hypotese, da bør det føre til at flere ting kan forklares. Selv om dette krav til vitenskapen er dogmatisk fremsatt uten ideell, men bare praktisk begrunnelse, så er det en vei å følge. Bare det som er fruktbart er sant. Vi vil da i de neste kapittler gå inn på følger av hovedteoremet, og også undersøke de bevegelser som kan gjøres ideelt. I det første kapittelet gjør vi generelle bevegelser, i de veste søker vi å forsklarer ulike områder av kjeglesnitteoreine slik den foreligger.

9.7 Anskuelse og språk

246. Når vi har kunnet sette ord på de ulike overgangene, da kan vi holde oss helt innenfor språket for å forklare de ulike bildene. Språket frigjøres fra anskuelsen, vi trenger ikke lengre peke på bildet for å forstå hva som sies. Det hele blir tautologier, men samtidig speiler språket anskuelsen slik at denne kommer til bevissthet.

247. Typen har vi for oss språklig ved at vi sier: Gitt et primært kjeglesnitt, tre sekundære som tangerer dette, tre tertiære som tangerer to og to av disse. Da finnes et kvartært som tangerer disse. Denne setningen gjelder så hele tiden, men hva vi legger i kjeglesnitt i de ulike tilfellene varierer. Noen ganger er det primære en ellipse, det kan være et punktpar, fordi et punktpar er et kjeglesnitt, og slik med de andre elementene.

248. Vi kan se hvordan Poncelets setning fremkommer: Vi har forutsetningene. Et kjeglesnitt som dobbeltangerer et annet kan arte seg som et punktpar som ligger på kjeglesnittet.

249. Vi kan ved å se på hvordan vi er i det språklige, eller logiske, se i hvilken grad vi enda henger fast i anskuelsen. Vi frigjør dermed det språklige fra anskuelsen.(Hilberts system for geometri er forsøkt i logsiske maskineri på på datamaskin, og det viser seg at han langtfra bare holdt seg til det logiske, men brukte stadig vekk geometriske anskuelser.)

250. Den morfologiske geometri frigjør dermed tenkningen på to nivåer. Først føres man opp i den rene anskuelse der man frigjør seg fra det sanselige slik

det er gitt oss med parallelle linjer, rette vinkler og sirkler. Dernest frigjør vi logikken fra det anskuelige, slik at språket ikke lenger er bundet til anskulsen, men speiler denne.

251. Denne type frigøring er det også man søker gjennom algebraen. Da når man et abstrakt nivå hvor tingene vever sammen logisk. Imidlertid må algebraen også sies å være underordnet det logiske i så henseende. (Språket, Logikken og anskuelsen hører også sammen)

9.8 Grunnbevegelser

252. Etter at vi nå har funnet frem til symmetriske typen er det på sin plass å se nærmere på de bevegelser vi gjør for å utvikle de ulike teoremene. Disse bevegelsene har vært mer eller mindre uttalte, vi skal nå klarlegge noen prisnipper. Forvandlingen beror billedmessig på de endringene vi kan gjøre med kjeglesnittene, og deres plasserinng i forhold til hverandre. I tillegg kommer visse underliggende forvandlignsmotiv, motivene for å endre disse slik vi gjør.

253. Vi fester igjen oppmerksomheten på det faktum at kjeglesnittene utarter i den ene retning til to punkter, og i den andre retning til to linjer. Kjeglesnittet kan altså opptre i to polare skikkelser, og fra et morfologisk synspunkt ligger her grunnen til blandt annet dualitetsprinsippet. Hvert teorem som vi danner morfologisk, kan vi danne dualt ved å følge en dual morfologisk vei. Det som opptrer som et prinsipp, kan følges realt som utviklingsprosess. Allikevel kommer vi ikke bort fra det mysterium at kjeglesnittet har disse poalre muligheter i seg, at verdens grunnleggende polaritet viser seg så pregnant i geometrien.

254. Ikke bare innen bildet gjør polare bevegelser seg gjeldende. I alle morfologiske dannelsesakter gjør vi en indre polare bevegelser av ulik art.

255. Det første opptrer når vi tenker frem selve skikkelsen. Vi setter da det første kjeglesnittet, og til disse legger vi til andre. Til disse igjen atter andre, til vi ender opp med det siste som følge. Vi legger dermed inn en retning som ikke ligger i urtypen selv, men for at noe skal fremtre må vi begynne, utvikle dette, og avslutte. Vi har med en dannelse i tid så og si for at noe helhetlig skal kunne fremtre i rommet.

256. Den neste bevegelsen vi gjør er en polariering i den morfologiske foregangen. For å endre hele bildet hodler vi noen elementer fast, mens andre får bevege seg. Vi kan ikke endre alle på en gang, da blir alt flytende og uhåndterlig. Denne prosess er å ligne med dem vi ser i det organiske når det i en organisme dannes bentruktur på den ene siden, og blodomløp på den

annen, eller der vi i planten har differensieringen mellom stengel og safter. Slike bevegelser har vi nylig sett ved fremkomsten av Desargues setning på ulike måter.

257. Enda en differensiering kan vi bli var, og det er at mellom de bevegeleige elementene er det et element som vi setter som drivende, det som leder an, og den andre følger dette. Denne differensieringen kan være mer eller mindre tydelig, men ved konstruksjoner kommer den tydelig frem i dagen. Her har har vi et element som beveges i en retnign, eller langs en sirkel. Andre elementer følger på, og et resulternde element konstruerer.

258. Endelig har vi dette at kjeglesnitten som er av en høyere orden en linjer og punkter, spesialiseres til disse. De dør på et vis ned i en lavere verden. Gjennom bevegelse dannes det en rad av de lavere elementene, og kejglesnittene som noe høyere kommer tilsyne. Vi har da med en inkarnasjon av noe å gjøre, og dette er muliggjort at noe av samme art så og si har ofret seg.

259. Vi finner dermed i tenkningen flere aspekter av det som foregår som drivende elementer i den organsike verden. Vår jegs aktivitet i bildet, gjenfinner vi som liv der ute i verden.

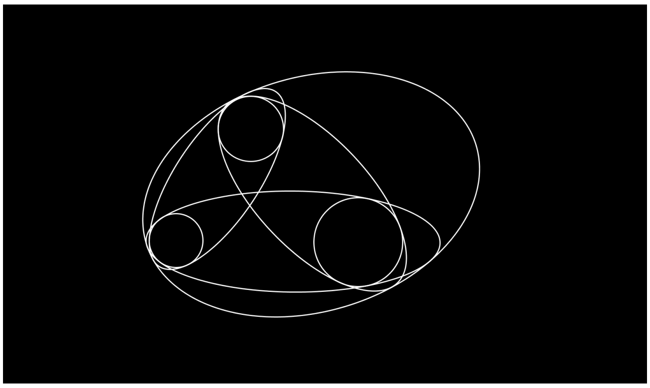
9.9 Grunnleggende metamorfoser av typen

260. I de mest generelle teoremene vi betraktet var det snakk om opptil fire kjeglesnitt i bildene. Nå har vi å gjøre med hele åtte kjeglesnitt som vever sammen. Dette gjør det ikke enkelt å overskue de ulike bevegelsene, så en viss systematikk i undersøkelsene må til. Det første vi må se på er hvordan ulike bilder konkret kommer til utrykk.

Kapittel 10

Sirkelsetninger

Når urbildet, eller typen er funnet, da er har vi nådd et mål i en viss forstand. Vi har vunnet et utsyn over de ulike bilder og teoremer, disse holdes alle sammen av en ide. Men ennå er ikke typen utømt for muligheter, og det finnes nå to veier for videre betraktnigner. Den ene vei er fortsatt den syntetiske metode, den sammenlignende, hvor vi ser om vi kan finne synteser og høyere lovmessigheter. Denne bestrebelse blir tydeligere enn tidliger, da anelsen var ledetråden. Nå har vi en type som et aktuelt bilde muligens går opp i. Vi kan da på søke å løse opp de ulike elementene i bildet til kjeglesnitt. (Den muligheten er alltid tilstede at det ikke går, at andre urbidler må sees på.)
Den andre veien er bevegelsene utifra typen. Når denne er gitt kan man se hva som skjer når de ulike keglesnittene antar ulike former og posisjoner. Her brukes fantasien, og man ser hva som oppstår. Ut fra denne prosess kan helt nye teoremer som vi ikke har sett før komme frem i dagen.
Goethe: Hvis jeg var yngre ville jeg foretatt en reise til Indien, ikke for å oppdage noe nytt, men for å se dette på min måte.
Et aspekt er også at når vi finner nye former ut fra fantasien, da kan disse vise seg å forklare teoremer som før ikke var sett i en morfologsik sammenheng. Forgjeves søkte forfatteren å finne en tilfredstillende morfologisk løsning på to sentrale kjeglesnitteorem, uten at det lyktes. Det ene av disse teoremene var definisjonen av kjeglesnittene som geometrisk sted for konstant sum. Ved fri fantasi oppstod imidlertid former hvorfra løsningene fremkom på overaskende vis. Vi skal etterhvert se den veien som fører til dette teorem, og denne er en del av en omfattende klasse teoremer.
Vi har da for oss følgende; hvilke muligheter finnes fortsatt som utfoldelsesmuligheter for typen? Den andre siden av saken er, hvile kjeglesnitteoremer av elementær art har vi ennå ikke berørt? Vi erkjenner da at vi ennå ikke har sett hvordan konstant sum blir til. Vi har heller ikke sett hvordan vi danner



Figur 10.1: Tre sirkler og fire ellipser

kjeglesnitt ut fra sirkel. Begge disse problemstillingene fremkommer ved at et kjeglesnitt blir til sirkelpunktene, slik at flere sirkler gjør seg gjeldende i bildet.

10.1 Tresirkelteoremet

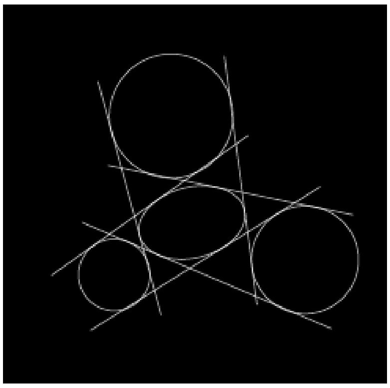
261. Vi har allerede sett på hvordan tre sirkler dannes ved at det primære kjeglesnittet er sirkelen, eller sagt på en annen måte, den uendelig store sirkelen. Nå vil vi utvide dette, og se på det som oppstår når det primære kjeglesnittene er sirkelpunktene, men der vi ikke foretar oss noe særskilt ellers. Da vil de tresekundære kjeglesnittene være sirkler, mens de fire andre kjeglesnitt fortsatt vil være generelle keglesnitt.(fig.10.1)

Bilde 87. *Gitt tre sirkler, og tre kjeglesnitt som dobbelttangerer to og to av disse. Da vil et fjerde kjeglesnitt dobbelttangere de tre kjeglesnittene.*

Selv om vi tidligere har vi brukt begrepet tresirkelteoremet, vil vi også nå bruke denne betegnelsen, og vi vil si det generelle tresirkelteoremet hvis det kan forekomme tvil.

262. Vi har nå en klasse teoremer der tre sirkler alltid er til stede. Dette gjør at det er muligheter for å finne metriske sammenhenger siden slike er knyttet til sirkler. Vi har også en litt større oversikt her enn når det primære kjeglesnittet er to generelle punkter, vi er kjent med sirkelen og holder den lettere i anskuelsen.

263. Nå oppstår jo av det generelle tresirkelteoremet det spesielle tresikelteoremet ved at de tre tertiære kjeglesnittene blir diagonaler, og at det kvartære



Figur 10.2: Indre fellestangenter

blir deres felles punkt. Monges setning oppstår, som vi har sett, når de tre kjeglesnittene blir linjepar med tre fellespunkter på samme linje.

264.

Når de tertiære kjeglesnittene blir linjerpar har vi imidlertid også en annen mulighet; de tre parene fellesdiagonaler kan alle ligge mellom sirklene. Skjærignspunktene mellom disse vil ikke ligge på samme linje, men de vil berøre samme kjeglesnitt.

Bilde 88. *Gitt tre sirkler som ligger på utsiden av hverandre, og de seks fellestangentene mellom sirklene. Fellestangentene vil da ligge på samme kjeglesnitt.*

Polariteten mellom tre linjer gjennom et punkt, og seks linjer på samme kjeglesnitt kommer også tilsyne her.

265. En spesiell variant av setninge over fremkommer når det felles kejglesnittet til de tre par linjene går over til et punktpar. Da vil tangentene til sirklene møte tre og tre i to punkter. Dette kan skrives på en annen måte:

Bilde 89. *Gjennom hvert av to punkter går det tre linjer. Hvis to sirkler er innskrevet av to og to par av linjene, da vil en sirkel også være innskrevet i de to siste parene.*

Denne varianten finnes ikke når de tertiære kjeglesnittene blir til punktpar; noe som kommer av at sirklene har sine andre fellespunkter som sirkelpunkter.

266. I konfigurasjonen har vi tre linjer som krysser tre andre; så vi har et slags Papposteorem for sirkler. Vi kan ytterliger spsialisere dette ved å la linjer falle

sammen. I det ene tilifellet faller linjer fra hvert sitt punkt sammen, og vi får:

Bilde 90. *Gitt to sirkler som tangerer hverandre i samme punkt på en linje, og to punkter til på linjer. Fra linjene trekker vi tangenter til begge sirklene, og de fire tangentene vil da tangere samme sirkel.*

267. I det andre tilfellet faller to linjer fra samme punkt sammen; det vil si, de faller ikke sammen slik at sirkelen klapper sammen, men de går fra hverandre slik at sirkelen blir tangent i det ene punktet.

Bilde 91. *Gitt en trekant med en linje fra toppunktet som deler trekanten i to deler. Vi innskriver i de tre trekantene en sirkel. Da vil en fellestangent mellom de to minste gå gjennom tangeringspunktet til den store på den felles linjen.*

Fra denne setningen kan vi innse flere metriske forhold.

10.2 To brennpunkter og konstant sum

268. Slik kan vi fortsette å bevege elemetentene på ulike måter. Vi har imidlertid i mente at vi ser etter bilder der brennpunktene inngår. Vi skal komme frem til et bilde der vi kan vise den sentrale setningne:

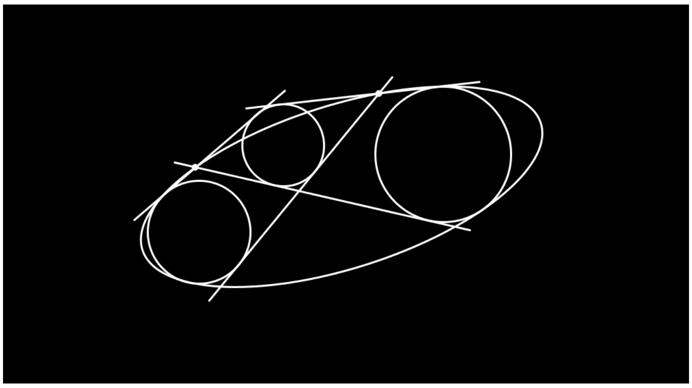
Metrisk lov 15. *Gitt et kjeglesnitt og de to brennpunktene. Fra alle punkter på periferien er summen av avstandene til brennpuntktene den samme.*

Vi søker derfor et geoemtrisk bilde der to brennpunkter forekommer.

269. Umiddelbart finner vi et teorem der tre brenpunkter er til stede. Vi tenker oss en tresirkeldannelse med tre sirkler og fire kjeglesnitt. Så lar vi de tre sirklene bli mindre slik at de etterhvert tangerer kjeglesnittene imaginært, og til slutt blir de til brennpunkter. Vi har da setningen:

Bilde 92. *Gitt tre kjeglesnitt der to og to har samme brennpunkt. Da vil kjeglesnittene tangere samme kjeglesnitt.*

270. Vi skal imidlertid bare ha to brennpunkter, og vi kan danne et bilde der to av sirklene er blir brennpunkt, mens den tredje forblir sirkel. Vi danner da først et bilde med tre sirkler og tre kjeglesnitt ligger slik at det siste kjeglesnittet ikke blir omsluttende, men er en ellipse mellom de tre andre kjeglesnittene. Ellipsen bli så smalere, og når den blir et punktpar har vi bildet:



Figur 10.3: Konstant sum lovmessighet

Bilde 93. *Gitt to kjeglesnitt som har en sirkel felles med et tredje kjeglesnitt, og som har to møtes i to punkter på periferien til dette. De vil også disse to kjeglesnittene ha felles sirkel.*

271. Vi fortsetter prosessen og lar de to kjeglesnittene over bli til to par linjer. Vi har da:

Bilde 94. *Gitt et kjeglesnitt og to sirkler som tangerer dette. Vi legger doble tangenter på begge sirklene slik at en tangent fra hver møtes i et punkter på periferien til kjeglesnittet. Da vil de fire linjene innskrive en sirkel.*

Ut fra denne setningen kunne vi kommet frem til det som Jakob Steier sier er en ny definisjon av kjeglesnitt. Vi skal imidlertid først se hvordan det hele blir i et mer spesielt tilfelle.

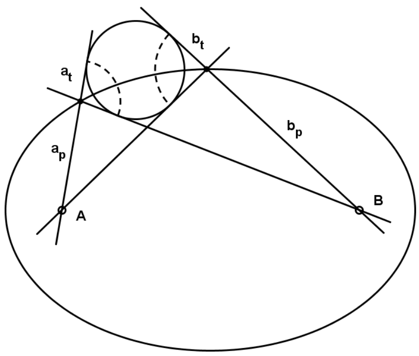
272. Det som intreffer nå er at sirklene tangerer kjeglesnittet imaginært. Vi lar dem så minke slik at de etter hvert blir til brennpunktene i kjeglesnittet. Da har vi:

Bilde 95. *Gitt et kjeglesnitt, og et par linjer gjennom hvert brennpunkt slik at to og to møtes på periferien. Da vil de fire linjene innskrive en sirkel.*

(Fig.10.4)

273. Vi har nå kommet frem til et bilde som på ganske elementært vis gir oss setningen for konstant sum. Ved å betenke at lengden av tangentene fra et punkt til en sirkel er like, ser vi av figuren (10.4) at summen av avstandene fra brennpunktene til periferien er lik summen av tangentlegdene til sirklene.

274. Vi kan gjøre de samme betraktningene før sirklene blir til brennpunkt (Fig.94), og da oppstår Jacob Steiners generelle setning.



Figur 10.4: Konstant sum lovmessighet

Metrisk lov 16. *Alle punkter som ligger slik at summen av tangentsialavstandene til to gitte sirkler er konstant, ligger på et kjeglesnitt.*

Ved å variere kommer vi også frem til tilsvaredne setninger for parabel og hyperbel.

10.3 Brennpunkter som sentre

275. Vi har tidligere definert senteret til en sirkel som polen til linjen i uendelig med hensyn på sirkelen. Vi har jo da blandt annet den egenskap at når to sirkler tangerer hverandre, da vil linjen gjennom sentrene går gjennom tangeringspuntket. I motromsbildet er styrelinjene å betrakte som sentretil alle kjeglesnitt med felles brennpunkt, og når to kjeglesnitt tangerer hverandre vil tangenten i tangeringspuntet møtes med senterlinjene i et felles punkt.

276. Nå viser det seg imidlertid at når kjeglesnitt har felles brennpunkt, da vil de andre brennpunktene også ha karakter av å være senter i det angjeldende kejglesnitt. Blant annet gjelder følgende teorem som svarer til det ovenfor:

Bilde 96. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt som tangerer hverandre i et punkt. Da vil tangeringspuntet ligge på linje med de andre brennpunktene.*

Vi skal se på den utforming av tresirkelteoremet som fører til disse betraktnignene.

277. Teoremet over, blant mange flere, oppstår når vi gjør en motsatt bevegelse av den vi foretok for å få frem setningen for konstant sum. Der gjorde vi en prosess der det kvartære kjeglesnitt ble til to puntker. Nå lar vi dette i stedet bli to linjer, og når vi snur på rekkefølgen av elementer som opptrer kan vi beskrive:

Bilde 97. *Gitt tre ellipser som ligger mellom to linjer, slik at to og to av ellipsene dobbelttangerer samme sirkel. Da vil også det tredje paret ellipser dobbelttangere en sirkel.*

Fra dette teoremet kan vi gå i flere retnigner, og vi vil vise noen bilder som oppstår før vi vender oss til den konkrete problemstillingen med sentre.

278. Vi kan umiddelbart la den ene linjen gå til uendelig. Da vil de tre kjeglesnittene blir parabler, og vi får følgende enkle setning:

Bilde 98. *Gitt tre sirkler, og tre parabler som hver dobbelttangerer to av disse. Da vil de tre parablene tangere samme linje.*

Dette bidlet viser en grunnleggende forbindelse mellom tre sirkler og tre parabler.

279. Vi går tilbake til det forrige bildet, og endrer nå dette ved å la det ene kjeglesnittet mellom de to linjene bli til et linjepar gjennom fellespunkttet til linjene. Da er det bare to kjeglesnitt tilbake, og en innholdsrik sammeheng mellom to kjeglesnitt er da gitt ved:

Bilde 99. *Gitt to kjeglesnitt mellom to linjer som berører samme sirkel. Vi trekker en linje gjennom fellespunktet til linjene, og finner så sirkler som berører hvert sitt kjeglesnitt, og som tangerer linjen. Da vil en annen fellestangent til sirklene også går gjennom toppunktet.*

Denne setnigen er nå utgangspuntktet for flere sammmenhenger mellom to kjeglesnitt.

280. Vi kan også her la den ene linjen gå til uendelig, og de to kjeglesnittene blir til parabler, mens linjene blir parallelle.

281. Lar vi nå de to sirklene mellom de parallelle linjene bli stadig mindre, slik at de blir til brennpunktene for parabelen, da har vi den mystiske setning:

Bilde 100. *Gitt to parabler som dobbelttangerer samme sirkel. Da vil en linje gjennom de to brennpunktene være parallell med en fellestangent.*

282. Den generelle varianten av teoremet over blir:

Bilde 101. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, de to andre brennpunktene, og to fellestangenter til kjeglesnittene. Da vil fellespunktet mellom tangentene ligge på linje med brennpunktene.*

Ved denne er vi nært ved teoremet vi ville vise. Også denne setningen gjelder for sirkler; fellespunktene til to sirkler ligger på linje med sentrene.

283. Når de to kjeglesnittene i stedet tangerer hverandre, vil fellespuntket mellom tangentene bli tangerignspunktet, og vi får setningen over. Denne får en spesiell utforming for parabeblenes del:

Bilde 102. *Gitt to parabler med parallelle akser som tangerer hverandre. En linje gjennom brennpunktene til parablene går da også gjennom tangeringspunktet.*

Parabeler med felles brennpunt har felles akser.

10.4 Like store kjeglesntitt

284. At brennpunktene kan fremstå som sentre kan vi også se ved å gå i en litt annen retning. For sirkler har vi den opplagte setningen at når midtnormalen mellom sentrene til to sirkler går gjennom et av skjæringspunktene mellom dem, da vil den også gå gjennom det andre skjæringspunktet. Dette er ikke fullt så opplagt for kjeglesnittenes vedkommende, men vi har:

Bilde 103. *Gitt to kjeglesnitt med et felles brennpunkt. Hvis midtnormalen mellom de andre brennpuntkene går gjennom et skjæringspunkt mellom kjeglesnittene, da går den også gjennom et annet.*

Denne setningen fremkommer ad en litt annen vei. Vi ser på hva som skjer.

285. Vi får setningen.

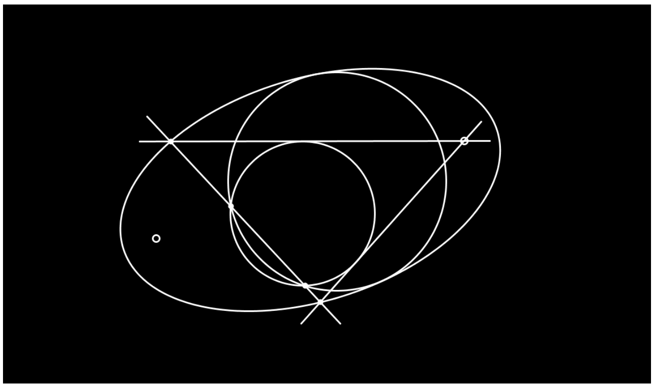
Bilde 104. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og sirkler som tangerer hver av disse invendig. Hvis en diagonal mellom de to kjeglesnittene går gjennom et av skjæringspunktene mellom sirklene, da går den også gjennom det andre.*

Her kunne vi selvsagt også latt det felles brennpunktet være en sirkel som dobbelttangerte begge kjeglesnittene.

286. Ved tangering har vi:

Bilde 105. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og sirkler som tangerer hver av disse invendig. Hvis den ene sirkelen tangerer en diagonal mellom de to kejglesnittene, da vil den andre sirkelen tangere diagonalen i samme punkt.*

287. En spesiell nyanse av denne har vi når det ene kjeglesnittet er to linjer.



Figur 10.5: Sirkler med felles diagonal

Bilde 106. *Gitt et kjeglesnitt, et brennpunkt, og to linjer gjennom brennpunktet. Vi finner linjen mellom to av skjærigsnpunktene, og den innskrevne sirkelen i trekanten vil tangere linjen i samme punkt som en innskrevet sirkel.*

Ved denne setningen kan vi konstruere en sirkel som tangerer et kjeglesnitt og en gitt linje.

288. Når det ene av kjeglesnittene blir to linjer får vi en spesiell variant også av det, og denne får et spesielt utrykk for parabler.

Bilde 107. *Gitt en parabel, to linjer parallelle med aksen, og en linje gjennom skjæringspunktene mellom parabelen og parallellene. En sirkel som tangerer de to parallellen skærer linjen i to punkter, og en sirkel som dobbelttangerer parabelen vil enten går gjennom begge skjæringspunktene eller ingen.*

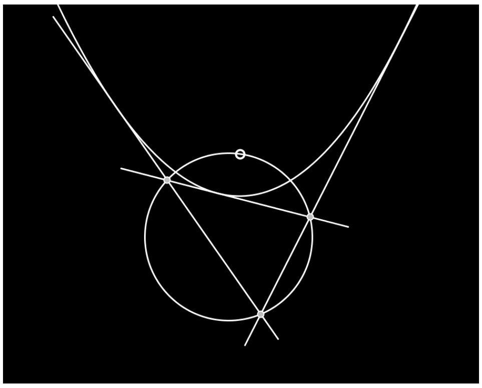
Denne setningen kan anvendes til å finne sirkler som dobbelttanger parabelen.

289. En spesiell variant har vi ved tangering.

Bilde 108. *Gitt en parabel, to linjer parallelle med aksen, og en linje gjennom skjæringspunktene mellom parabelen og parallellene. En sirkel tangerer de to parallellene og linjen, og en sirkel som dobbelttangerer parabelen og tangerer linjen, vil tangere den andre sirkelen i tangeringspunktet.*

10.5 Møte mellom euklidsk og moteuklidsk

290. I de betraktnigene vi nettopp har gjort har vi sett at vi kan gjøre bevegelser fra sirkler til brennpunkter. De omvendte bevegelsene finner vi også



Figur 10.6: Parabel og brennpunkt

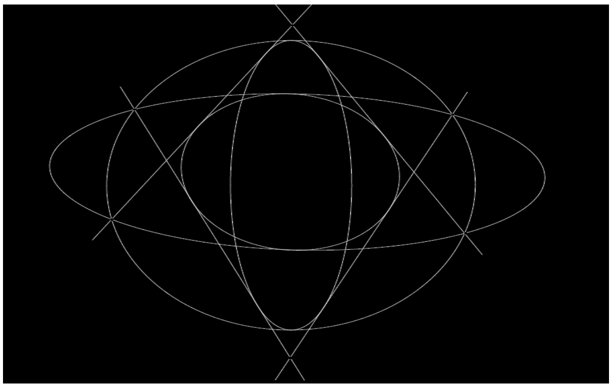
ofte, når vi har et forhold som innebærer brennpunkt, da forventer vi at dette kan løses opp til en dobbeltatngerende sirkel. Dette viser seg overaskende nok å ikke alltid være mulig, og en setning hvor dette ikke er tilfellet er en vel kjent setning knyttet til parabelen.

Bilde 109. *Gitt en parabel, og en trekant som omskriver denne. En sirkel som omskriver trekanten vil da gå gjennom brennpunktet til parabelen. (Fig.11.1)*

Denne setningen kan ikke generaliseres slik at brennpunktet blir til en sirkel som dobbelttangerer parabelen, og vi skal straks se grunnen til dette.

291. Setningen over fremkommer av Poncelets setning (9.5), og overgangen her er et klassisk eksempel på en overgang fra to reelle punkter til sirkelpunktene. Poncelets setning sier at når to trekanter er innskrevet i et kjeglesitt, da omskriver de også et kjeglesnitt. Vi lar nå to punkter på samme trekant være sirkelpunktene. Dette fører til at det omskrevne kejglesnittet blir en sirkel. Linjen gjennom sirkelpunktene må være linjen i uendelig, og det indre kjeglesnitt som tangerer denne linjen må da være parabel. De to tangentene gjennom sirkelpunktene danner brennpunktet til denne parabelen fordi de er tangenter til denne. Den andre trekanten er ikke berørt av alt dette, og den omskriver parabelen. Sirkelen omskriver denne igjen, og går også gjennom det sjette punkt, som er brennpunktet til parabelen.

292. Her har vi altså to teoremer som har samme struktur, men som opptrer helt ulikt når sirkelpunktene kommer i betraktning. Vi innser nå også grunnen til at brennpunktet i dette tilfellet ikke kan være en sirkel; dette kommer av at de to linjene som danne brennpunktet kommer fra hvert sitt kjeglesnitt. Vi så hvordan to motstående sider i sekskanten kom fra et kjeglesnitt; vi må



Figur 10.7: Relle punkter

derfor ha en linje fra hver trekant for å danne kjeglesnitt; her danner to linjer i samme trekant brennpunktet.

293. Denne betraktning leder oss til å spørre etter den mest generelle konfigurasjon som lar et punkt fra hver av to kjeglesnitt danne sirkelpunter, og en linje fra hvert av to kjeglesnitt danne brennpunkt. Det viser seg å være variant der vi fra hovedteoremet har latt to kjeglesnitt bli to par punkter, og to andre bli to par linjer, slik at konfigursjonen er selvdual.

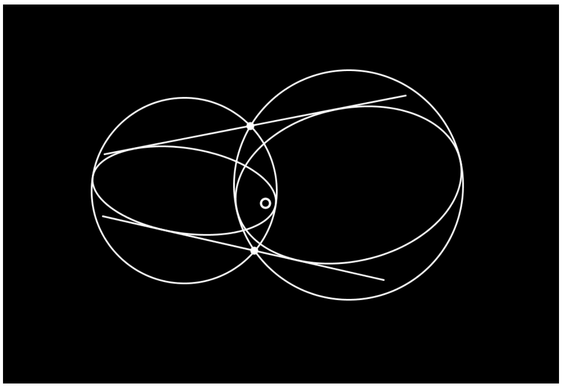
Bilde 110. *Gitt et kjeglesnitt som skjærer et annet i fire punktet, og et tredje som dobbelttangerer dette. Gjennom hvert av de fire skjærignspunktene legger vi en tangent til det dobbelttangerende kjeglesnittet. Det finnes da et kjeglesnitt som dobbeltanterer det andre kjeglesnittet og de fire linjene.*

Vi ser her at to av kjeglesnittene har fire felles punkter, og at de to andre har fire felles linjer.

294. Vi lar nå to av punktene som stammer fra hvert sitt kjeglesnitt bli sirkelpunktene. Begge kjeglesnittene gjennom disse blir da sirkler, mens de to andre kjeglesnittene får felles brennpunkt av de to linjene gjennom sirkelpunktene. Vi kan da sette opp setningen:

Bilde 111. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og sirkler som dobbeltangerer hver av disse. Disse er lagt slik at en fellestangent til kjeglesnittene går gjennom et skjærignspunkt til sirklene. Da vil den andre fellestangentene gå gjennom det andre skjæringspunktene mellom sirklene.*

295. Vi bemerker at denne setnigne er helt dual, det er like mange punkter og linjer i konfigurasjonen. Videre er det selvpolart med hensyn på brennpunkt



Figur 10.8: To imaginære punter

og sirkelpunkter. Det er to sirkler knyttet til sirkelpunktene, og to kjeglesnitt knyttet til de to linjene gjennom brennpunktet. Setningen viser seg å ha en rekke egenskaper. Vi skal gjøre en første betraktning som viser en bestemt egenskap, før vi ser på en mer generell variant.

296. Vi lar det ene kjeglesnittet utvide seg slik at det etterhvert blir en sirkel. Denne sirkelen vil da ha det felles brennpunkt som senter. Den omskrevne sirkelen vil falle sammen med denne sirkelen, og vi har følgende.

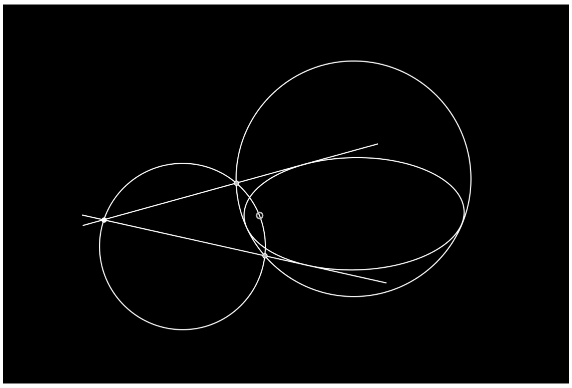
Bilde 112. *Gitt et kjeglesnitt, og en sirkel med samme senter om omskriver dette. En annen sirkel har senter i et av brennpunktene til kejglesnittet og en tangenter til denne sirkelen der den skjærer den første, vil også være tangenter til kjeglesnittet.*

Av setnignen får vi umiddelbart omhyllningsetningen, fordi vi innser at tangentene må være vinkelrette til linjer fra brennpunktet til tangeringspunktet.

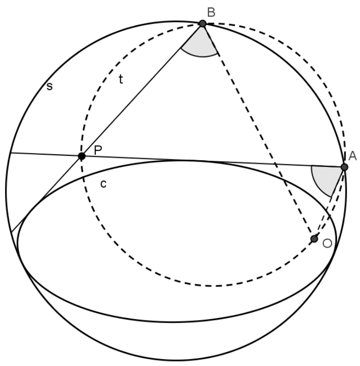
297. Vi kommer også til innhylningsloven ved å etablere en annen variant. Vi lar nå ett av kjeglesnittet bli stadig smalere, og idet det faller sammen blir det til et linjestykke, hvorav bare endepuntene har betydning. Vi får da følgende forhold:

Bilde 113. *Gitt et kjeglesnitt, en sirkel som omskriver dette, og to tangenter til dette. En sirkel gjennom fellespunktet for tangentene, og gjennom to av skjæringspunktene mellom disse og sirkelen, vil også gå gjennom brennpunktet til kjeglesnittet.*

Dette er en enkel og frapperede setning. Det som er å bemerke igjen er altså at brennpunktet i dette tilfellet ikke lar seg løse opp til en sirkel fordi det er dannet av to linjer fra hvert sitt kjeglesnitt.



Figur 10.9: Sirkel gjennom brennpunkt



Figur 10.10: Periferivinkel setning

298. Setningen gir en generalsiering av konstruksjonsmåten over fordi den gir en bestemt metrisk setning:

Metrisk lov 17. *Gitt et kjeglesnitt omskrevet av en sirkel. Fra et punkt på periferien trekker vi en tangent, og en linje gjennom et brennpunkt. Når vi beveger punktet vil vinkelens størrelse være den samme. (Fig.10.10)*

Når vi studerer figuren ser vi at de linjene fra A og B begge er tangenter til c, og at de går gjennom brennpunktet. Samtidig møtes to linjer på sirkelen t, og her sier periferivinkelen at de må være like store.

299. Setningen vil gå over til til parabelsetningen over når kjeglesnittet blir en parabel. Da vil den omsluttende sirkelene bli en linje. En annen variant har vi når den andre sirkelen blir linje. Dette inntrer når de to tangentene til kjeglesnittet blir parallelle, og sirkelen må gå gjennom et punkt i uendelig.

Bilde 114. *Gitt et kjeglesnitt, en sirkel som omskriver dette, og to parallelle tangenter til kjeglesnittet. Da vil en linje gjennom to av skjæringspunktene mellom tangentene og sirkelen også gå gjennom brennpunktet.*

Når den omskrevne sirkelen har samme senter som kjeglesnittet, vil også dette forhold begrunne innhyllingssetningen.

300. De to tangentene kan også tangere kjeglsntittet der denne tangerer den omsluttende sirkelen. Da vil vi får en symmetrisk situasjon, og en sirkel som går gjennom begge brennpunktene.

Bilde 115. *Gitt et kjeglesnitt, en omhyllende sirkel, og en tangent i hvert av tangeringspunktene mellom de to. En sirkel gjennom tangeringspunktene, og gjennom skjærignspunktet til tangentene, vil da også gå gjennom brennpunktene til kjeglesnittet.*

Fra denne setningen kan vi løse flere oppgaver knyttet til normaler til kjeglesnitt.

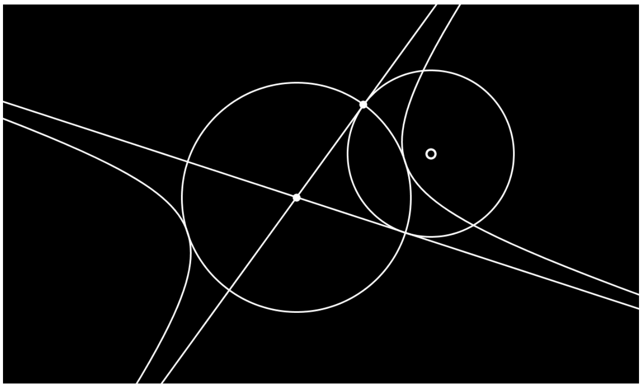
301. Noe særkilt intreffer også om de to tangentene faller sammen til en tangent. Punktet mellom tangentene blir da tangeringspunktet med kjeglesnittet. De to skjæringspunktene med sirkelen faller sammen til et, men følger vi den infinitesimale prosessen her innser vi at sirkelen gjennom skjærignspunktene blir tangent i dette punktet.

Bilde 116. *Gitt et kjeglesnitt, en tangent til dette, og en sirkel som omskriver det. En sirkel som tangerer den første sirkelen i et skjærignspunkt mellom linjen og sirkelen, og som går gjennom brennpunktet, vil også gå gjenneom punktet der tangenten møter kjeglesnittet.*

302. De setningene vi har sett får en særlig nyanse når vi har å gjøre med hyperbler, og tangentene er asymtotene. Vi får da flere setninger som gir egenskaper ved hyperbelen og dens asymptoter.

Bilde 117. *Gitt en hyperbel og dens asymtoter, og en sirkel som dobbelttangerer hyperbelen. En sirkel gjennom senteret til hyperbelen, og gjennom to av skjøringspuntene med asymtotene, vil også går gjennom et brennpunkt til hyperbelen.*

Bilde 118. *Gitt en hyperbel, dens asymptoter, og en sirkel med senter i et brennpunkt som tangerer asymptotene. En annen sirkel med senter i hyperbelens senter som går gjennom tangeringspunktene, vil tangere hyperbelen.*



Figur 10.11: Hyperbel sirkler

10.6 Imaginær tangering

303. Flere sammenhenger viser seg når kjeglesnittet og den omhyllende sirkelen tangerer hverandre imaginært. En sammenheng viser seg også i overganen mellom de to formene, menlig i det tilfelle at den omhyllende sirkelen tangerer kjeglesnittet i fire punkter. Da får først parallellteoremet ovenfor 126 en særlig form.

Bilde 119. *En sirkel tangerer et kjeglesnitt firdobbelt. Linjer gjennom tangeringspunktet og gjennom brennpunktene skjærer sirklene i to punkter, og linjen gjennom disse punktene tangerer kjeglesnittet.*

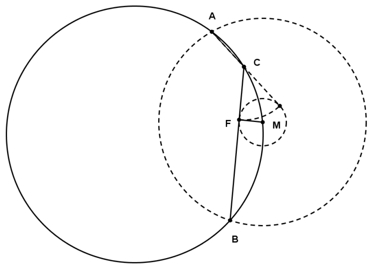
Går vi videre får vi imaginær tangering, og parallellsetninge kan nå brukes til å finne brennpunkt i kjeglesnittene.

304. Når det imaginært tangerende kjeglesnittet blir liggende i senteret av den omhyhyllende sirkelen, da blir dette selv en sirkel. Dermed oppstår følgende setning:

Bilde 120. *Gitt to konsentriske sirkler, og to tangenter til den indre sirkelen. En sirkel gjennom to av tangentenes skjærignspunkter med den ytre sirkelen som går gjennom fellsepunktet mellom tangentene, vil også går gjennom senteret til sirklene.*

305. Teoremet over viser setningen om knekket korde:

Metrisk lov 18. *Gitt en sirkel, to punkter A og B på sirkelbuen, og et tredje punkt C på buen som forbindes med korder fra A og B. Fra punktet M midt mellom A og B felles en normal til F, og denne vil halvere avstanden fra A til B via C.*



Figur 10.12: Knekket korde

Vi innser dette ut fra det geometriske forhold over ved å se studere tangentene.

Kapittel 11

Likevekt

I den siste familie av teoremer har vi en likevekt mellom sirkelpunkter og brennpunkt, eller mellom den uendelig stor sirkel, og den uedelig lille sirkel, som dog er forbundet med hverandre. Dette kommer allerede til utrykk i en bestemte til en viss grad forbausende teoremer. Et er gitt slik: Gitt en parbel og tre tangenter til denne. En sirkel som omskriver Parabelen vil også gå gjennom brennounktet til parabelen. Og vi har konstruksjonen. Gitt en sirkel og et punkt inne i denne. Linjer trekkes gjennom punktet, og der linjene treffer sirkelen reises normaler. Normalene omhyller da en ellipse som berører sirkelen, og som har punktet som brennpunkt. Det eiendommelige ved disse teoremene er at de nettopp ikke oppstår ved at en sirkel blir uedelig liten, og ved at en sirkel blir uendelig stor. Det synes som om brennpunktet er dannet av to imaginære linjer der de to linjene kommer fra hvert sitt kjeglesnitt. Og likeledes med punktene, hvert av brennpunktene stammer fra hvert sitt kjeglesnitt. Dette ser vi ved en klassisk overgang fra et reelt til et imaginært bilde. Denne overgangen er fra et bilde som er kjent også som et spesialtilfelle av Poncelsts teorem. Gitt et kjeglesnitt med to trekanter innskrevet. Da vil trekantene også innskrive et kjeglesnitt. Setningen innebærer også: Gitt et kjeglesnitt som innskriver en trekant der trekanten igjen innskriver et kjeglesnitt. Da finnes en lineør mengde trekanter som kan legges mellom de to kjeglesnittene. [1] Disse betraktningen kan fortsettes noe, men vi vender nå oppmerskomheten mot noen sirkelsetninger av en litt annen art. Selv om teoremene på mange vis ligner på de vi har sett, viser det seg at de ikke kommer ut av det grunnleggende sirkelteoremet, men at vi må går en litt annen vei.

[1] Dette kalles Poncelets teorem, men for alle mangekanter; hvis en mangekant ligger mellom to kjeglesnitt, da finnes en uedelig mengde kjeglesnitt mellom disse.

11.1 Tosirkel-brennpunkt setninger

I de betraktnigene vi nettopp har gjort har vi sett at vi kan gjøre bevegelser fra sirkler til brennpunkter. De omvendte bevegelsene finner vi også ofte, når vi har et forhold som innebærer brennpunkt, da forventer vi at dette kan løses opp til en dobbeltatngerende sirkel. Dette viser seg overaskende nok å ikke alltid være mulig, og en setning hvor dette ikke er tilfellet er en vel kjent setning knyttet til parabelen.

Bilde 121. *Gitt en parabel, og en trekant som omskriver denne. En sirkel som omskriver trekanten vil da gå gjennom brennpunktet til parabelen.*

Denne setningen kan ikke generaliseres slik at brennpunktet blir til en sirkel som dobbelttangerer parabelen, og vi skal straks se grunnen til dette.

Det viser seg at setningen kan tilbakeføres til dobbelttrakantteoremet fra forrige kapittel.[2]Her hadde vi det forhold at når to trekanter er innskrevet i et kjeglesitt, da omskriver de også et kjeglesnitt. Vi lar nå to punkter på samme trekant være sirkelpunktene. Dette fører til at det omskrevne kejglesnittet blir en sirkel. Linjen gjennom sirkelpunktene må være linjen i uendelig, og det indre kjeglesnitt som tangerer denne linjen må da være parabel. De to tangentene gjennom sirkelpunktene danner brennpunktet til denne parabelen fordi de er tangenter til denne. Den andre trekanten er ikke berørt av alt dette, og den omskriver parabelen. Sirkelen omskriver denne igjen, og går også gjennom det sjette punkt, som er brennpunktet til parabelen.

Her har vi altså to teoremer som har samme struktur, men som opptrer helt ulikt når sirkelpunktene kommer i betraktning. Vi innser nå også grunnen til at brennpunktet ikke kan være en sirkel; dette kommer av at de to linjene som danne brennpunktet kommer fra hvert sitt kjeglesnitt. Vi så hvordan to motstående sider i sekskanten kom fra et kjeglesnitt; vi må derfor ha en linje fra hver trekant sin trekant for å danne kjeglesnitt, her danner to linjer i samme trekant brennpunktet.

Denne betraktning leder oss til å spørre etter den mest generelle konfigurasjon som lar en linje fra hvert sitt kjeglesnitt danne brennpunkt. Det viser seg å være variant der vi fra hovedteoremet har latt to kjeglesnitt bli to par punkter, og to andre bli to par linjer, slik at konfigursjonen er selvdual.

Bilde 122. *Gitt et kjeglesnitt som skærer et annet i fire punktet, og et tredje som dobbelttangerer dette. Gjennom hvert av de fire skjærignspunktene*

[2]Den betraktning vi her gjennomføres er gjort i en eller annen bok som vi ikke husker igjen.

legger vi en tangent til det dobbelttangerende kjeglesnittet. Det finnes da et kjeglesnitt som dobbeltanterer det andre kjeglesnittet og de fire linjene.

Vi ser her at to av kjeglesnittene har fire felles punkter, og at de to andre har fire felles linjer.

Vi lar nå to av punktene som stammer fra hvert sitt kjeglesnitt bli sirkelpunktene. Begge kjeglesnittene gjennom disse blir da sirkler, mens de to andre kjeglesnittene får felles brennpunkt av de to linjene gjennom sirkelpunktene. Vi kan da sette opp setningen:

Bilde 123. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt, og en sirkel som dobbeltangerer hver av disse. Disse er lagt slik at en fellestangent til kjeglesnittene, går gjennom et skjærignspunkt til sirklene. Da vil den andre fellestangenten gå gjennom det andre skjæringspunktene mellom sirklene.*

Vi bemerker at denne setnigne er helt dual. Videre kan vi gjøre den betraktning at vi ikke kan la de to linjene være et kjeglesnitt; vi har altså ikke generelt at det finnes et kjeglesnitt som dobbelttangerer hvert av de to kjeglesnittene, og går gjennom skjæringspunktene til sirklene.

Denne setningen viser seg å ha en rekke egenskaper. Vi skal gjøre en første betraktning som viser en bestemt egenskap, før vi ser på en mer generell variant.

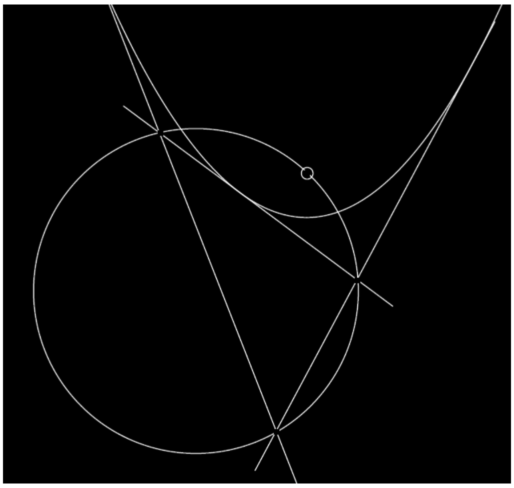
Vi lar det ene kjeglesnittet utvide seg slik at det etterhvert blir en sirkel. Denne sirkelen vil da ha det felles brennpunkt som senter. Den omskreven sirkelen vil falle sammen med denne sirkelen, og vi har følgende.

Bilde 124. *Gitt et kjeglesnitt, og en sirkel med samme senter om omskriver dette. En annen sirkel har senter i et av brennpunktene til kejglesnittet, og en tangent til denne sirkelen der den skjærer den første, vil også være tangent til kjeglesnittet.*

Fra denne setnignen får vi umiddelbart omhyllningsetningen, fordi vi innser at tangentene må være vinkelrette til linjer fra brennpunktet til tangeringspunktet.

Vi kommer også til denne setning ved å etablere en annen variant. Vi lar nå ett av kjeglesnittet bli stadig smalere, og idet det faller sammen blir det til et linjestykke, hvorav bare endepuntene har betydning. Vi får da følgende forhold:

Bilde 125. *Gitt et kjeglesnitt, en sirkel som omskriver dette, og to tangenter til dette. En sirkel gjennom fellespunktet for tangentene, og gjennom to av*



Figur 11.1: Parabel og brennpunkt

skjæringspunktene mellom disse og sirkelen, vil også gå gjennom brennpunktet til kjeglesnittet.

Dette er en enkel og frapperede setning. Det som er å bemerke igjen er altså at brennpunktet i dette tilfellet ikke lar seg løse opp til en sirkel fordi det er dannet av to linjer fra hvert sitt kjeglesnitt.

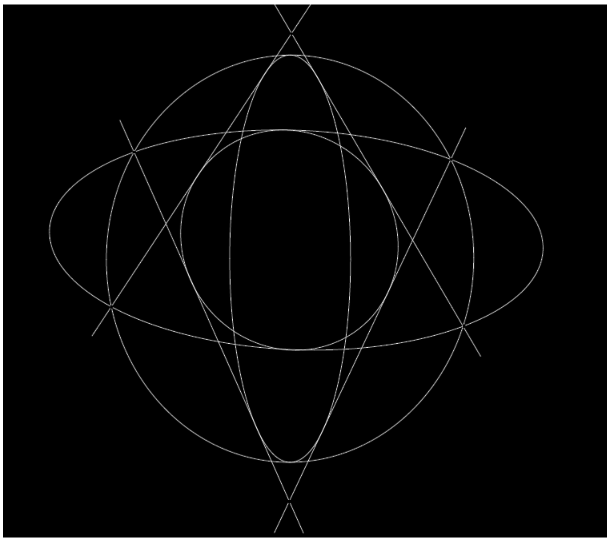
Denne vil gå over til til parabelsetningen over når kjeglesnittet blir en parabel. Da vil den omsluttende sirkelene bli en linje. En annen variant har vi når den andre sirkelen blir linje. Dette inntrer når de to tangentene til kjeglesnittet blir parallelle, og sirkelen må gå gjennom et punkt i uendelig.

Bilde 126. *Gitt et kjeglesnitt, en sirkel som omskriver dette, og to parallelle tangenter til kjeglesnittet. Da vil en linje gjennom to av skjæringspunktene mellom tangentene og sirkelen også gå gjennom brennpunktet.*

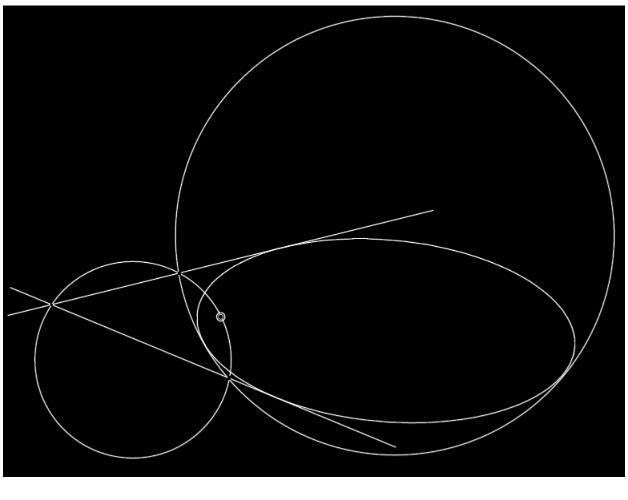
Når den omskrevne sirkelen har samme senter som kjeglesnittet, vil også dette forhold begrunne omhyllingssetningen.

De to tangentene kan også tangere kjeglsntittet der denne tangerer den omsluttende sirkelen. Da vil vi får en symmetrisk situasjon, og en sirkel som går gjennom begge brennpunktene.

Bilde 127. *Gitt et kjeglesnitt, en omhyllende sirkel, og en tangent i hvert av tangeringspunktene mellom de to. En sirkel gjennom tangeringspunktene, og*



Figur 11.2: Utgang for brennpunkt sirkelteorem



Figur 11.3: Sirkel gjennom brennpunkt

gjennom skjærignspunktet til tangentene, vil da også gå gjennom brennpunktene til kjeglesnittet.

Fra denne setningen kan vi løse flere oppgaver knyttet til normaler til kjeglesnitt.

Noe særkilt intreffer også om de to tangentene faller sammen til en tangent. Punktet mellom tangentene blir da tangeringspunktet med kjeglesnittet. De to skjæringspunktene med sirkelen faller sammen til et, men følger vi den infinitesimale prosessen her innser vi at sirkelen gjennom skjærignspunktene blir tangent i dette punktet.

Bilde 128. *Gitt et kjeglesnitt, en tangent til dette, og en sirkel som omskriver det. En sirkel som tangerer den første sirkelen i et skjærignspunkt mellom linjen og sirkelen, og som går gjennom brennpunktet, vil også gå gjenneom punktet der tangenten møter kjeglesnittet.*

De setningene vi har sett får en særlig nyanse når vi har å gjøre med hyperbler, og tangentene er asymtotene. Vi får da flere setninger som gir egenskaper ved hyperbelen og dens asymptoter.

Bilde 129. *Gitt en hyperbel og dens asymtoter, og en sirkel som dobbelttangerer hyperbelen. En sirkel gjennom senteret til hyperbelen, og gjennom to av skjøringspuntene med asymtotene, vil også går gjennom et brennpunkt til hyperbelen.*

Bilde 130. *Gitt en hyperbel, dens asymptoter, og en sirkel med senter i et brennpunkt som tangerer asymptotene. En annen sirkel med senter i hyperbelens senter som går gjennom tangeringspunktene, vil tangere hyperbelen.*

11.2 Imaginær tangering

Flere sammenhenger viser seg når kjeglesnittet og den omhyllende sirkelen tangerer hverandre imaginært. En sammenheng viser seg også i overganen mellom de to formene, menlig i det tilfelle at den omhyllende sirkelen tangerer kjeglesnittet i fire punkter. Da får først parallellteoremet ovenfor 126 en særlig form.

Bilde 131. *En sirkel tangerer et kjeglesnitt firdobbelt. Linjer gjennom tangeringspunktet og gjennom brennpunktene skjærer sirklene i to punkter, og linjen gjennom disse punktene tangerer kjeglesnittet.*

Går vi videre får vi imaginær tangering, og parallellsetninge kan nå brukes til å finne brennpunkt i kjeglesnittene.

Når det imaginært tangerende kjeglesnittet blir liggende i senteret av den omhyhyllende sirkelen, da blir dette selv en sirkel. Dermed oppstår følgende setning:

Bilde 132. *Gitt to konsentriske sirkler, og to tangenter til den indre sirkelen. En sirkel gjennom to av tangentenes skjærignspunkter med den ytre sirkelen som går gjennom fellsepunktet mellom tangentene, vil også går gjennom senteret til sirklene.*

Denne kan også ytterligere spesialiseres slik at to de to tangentene faller sammen.

Vi har dermed kommet til en avslutning når det gjelder hovedbetraktningene.

11.3 Oppgaver

6. ***Knekket korde***
Gitt en sirkel og tre punkter A, C og B på periferien, og linjerstyker AC og BC. Fra midtpunktet på buen mellom A og B feller vi en normal, og har punktet D der den treffer. Vis at avstandene langs linjene fra A til D, og fra B til D er like lange, selv om vi i det ene tilfellet har en brukket linje.

Vi anvender setningen over. Vi ser av figur 11.4 at den knekkte korden ACD er like lang som tangenten AE, og denne er igjen like lang som BD.

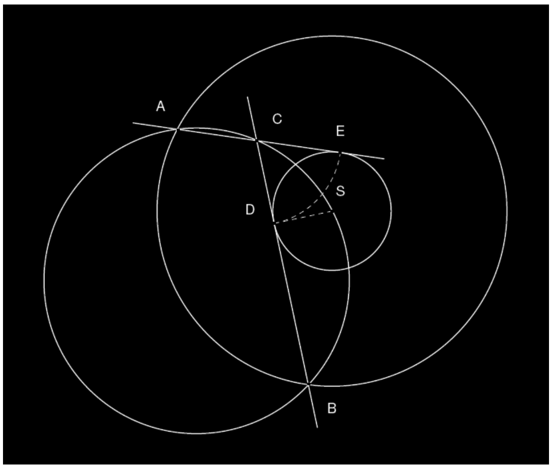
7. *Gitt et kjeglesnitt ved dets storakse og brennpunkter, og en tangent til kjeglesnittet. Finn punktet der tangenten berører kjeglesnittet.*

8. *Gitt en sirkel, og to punkter like langt fra senteret. Finn den korteste veien mellom punktene via sirkelperiferien.*

9. *Konstruer brennpuntet til en parabel som tangerer fire linjer.*

10. *En parabel er gitt ved brennpunkt og tre tangenter. Finn et av parabelens tangeringspunkter med tangentene.*

11. *Konstruer en parabel som tangerer fire linjer.*



Figur 11.4: Teorem knekket korde

Vi finner brennpunktet ved å finne skjærignspunktet mellom to sirkler som omskriver to trekanter. Vi kan finne nye linjer ved å legger sirkler som går gjennom brennpunktet og skjæringspunktet mellom to tangenter. De nye tangentene finnes mellom de andre skjæringspunktene. Punkter på tangentene finnes ved å la sirker tangere tangenter der andre skjærer .brennpunkt

12. *En hyperbel og dens asymptoter er gitt. Finn brennpunktene til hyperbelen.*

Del III

Tillegg

Kapittel 12

Utvidelser

1. Den grunnleggende typen lar seg utvide, eller står i forbindelse med flere andre teoremer, og vi skal se på noen av disse

12.1 Utvidelse til rommet

2. Typen lar seg umiddlebart utvide til rommet. Vi har da å kjøre med andregradskurver i rommet, eller kvadriker som de også kalles. Disse er grunnelementene, men den grunnleggende forbindelse er tagering langs et kjeglesnitt. Det vil altså si at to kvadriker berører hverandre kontinuerlig langs et kjeglensitt, og dette kjeglesnittet vil også ligge i et plan.

3. Til forskjell fra kjeglesnittene inntreffer et fenomen allerede ved forbindelsen mellom fire kvadriker.

Setning 1. *Gitt en kvadrik, og to andre som tangerer denne. Da finnes en lineær mengde kvadriker som berører disse to.*

Det samme har vi for kjeglesnittenes vedkommende, men der er det opplagt siden kjeglesnittene har fem frihetsgrader. Der vil det alltid være slik at to kjeglesnitt har en lineær mengde kjeglesnitt som berører dem begge, mens her er ikke det tilfelle. I alminnelig vil ikke to vilkærlige kvadriker tangere en mangde andre, men har de først en kvadrik felles, da vil de ha en lineær mengde felles.

12.2 Utarting av kvadriker

4. En kvadrik som tangerer to andre gjennomgår på samme måte som kjeglesnittene fire spesielle utartinger, to nullsteder så og si og to poler. I det ene

tilfellet blir kvadriken et plan, med et kjeglesnitt som begrensende, i det andre tilfellet et punkt, med en kjegle gjennom.

5. Dette innebærer også at to kvadriker som er innholdt i en tredje også har to kjegler felles, og to felles plan, med kjeglesnitt i.

6. I rommet kan man også på en annen måte følge kontinuerlig overgangen fra reell til imaginær tangering. Når vi snitter to flater som er forbundet med hverandre gjennom deres berøringskjeglesnitt, vil bildet bli to kjeglsnitt som dobbelttangerer hverandre. (Spesielt vil et helt kjeglesnittbilde fremkomme når hele konstellasjonen snittes.) Lar vi nå et snittplan dreie slik at det fremdeles skjærer kjeglesnittene, men ikke tangeringskurven, da vil de to kjeglesnittene berøre hverandre imaginativt.

7. Denne betraktningen kan vi gjøre med en kjegle og en kule som tangerer hverandre i en sirkel. Bildet av dette i et plan som skjærer over kulen, kjeglen og sirkelen vil være en sirkel som dobbelttangerer et kjeglesnitt. Når planet ikke lenger skjærer sirkelen, men fortsatt kulen og kjeglen vil bildet være en sirkel som d-tangerer kjeglesnittet imaginært. Når planet tangerer kulen vil sirkelen bli uendelig liten, men den d-tangerer fortsatt kjeglesnittet, og vil således være brennpunktet i kjeglesnittet. Dermed er vi tilbake til utgangsdefinisjonen for brennpunkt ut fra snitt med kjegle.

8. Dette innebærer at to kvadriker som tangerer en felles kvadrik vil skjære hverandre langs to kjeglesnitt, mens de to i almimmelighet skjærer hverandre langs en fjerdegradskurve i rommet.

12.3 Imaginær sirkel Brennpunkt og brennsirkel

9. I planet kan sirkelen bli sett på som kjeglesnitt som går gjennom de to imaginære sirkelpunktene i uendelig. Når vi anlegger lignende betraktninger i rommet finner vi at sfærer i rommet kan ses på som kvadriker som går gjennom en imaginær sirkel i uendelig.

10. Monges teorem og diagonaltresikelteoremet gjeldre umdiddlebart her.

12.4 Dobbeltkube

11. En annen generalisering som er sentral er å utvide strukturen. Strukturen til typen er jo oktaederet. Dette tall er en potens av to, og lar seg også skrive som en Pascalrekke, det vil si at det er summen av tallene 1, 3, 3, 1. I

denne rekkefølge beskriver vi typen. Forst et primært kjeglesnitt, deretter tre sekundære, så tre tertiære, og til slutt det finale eller kvartære. Dette kan vi utvide ved at vi starter med et kjeglesnitt, lar fire tangere dette. Mellom de fire finner vi seks som tagerer to og to. Så finner vi fire som tangerer tre og tre av de forrige, og til slutt et som tangerer de fire. Dette er en dobbeltkubestruktur som har 16 kjeglesnitt som alle berører 4 andre.

12. Denne gjedler også i rommet, og her kan vi danne oss et tydelig bilde av saken. Vi lar den imaginære sirkel i uendelig være den primære kvadrik. Gjennom denne går fire kuler, mellom de fire kulene finner vi fire plan. Så vil tre og tre plan møtes i fire linjer, og disse fire linjene vil gå gjennom samme punkt.

13. Å få slike frem i planet er ikke alltid like enkelt fordi sluttelementet ofte blir imaginæret. En variant der elemetnen kommer tilsyne har vi når vi starter med fire sirkler, finner de seks dobbelttangentene mellom dem, så de fire kjeglesnittene knyttet til tre og tre. Disse fire kjeglesnittene vil da alle tangere et femte kjeglesnitt.

Kapittel 13

Oppgaver

Til kjeglesnittlæren er det knyttet mange oppgaver, til dels av komplisert art. Mesteren på dette området var Jacob Steier som stilte frem og løste et utall oppgaver av forskjellig art.

I denne fremstillingen skal vi ikke går løs på alle typer oppgaver, men begrense oss på to vis. Det ene er at vi skal holde oss innenfor det morfologiske området vi arbeider i ved anvendelse av metode; det vil si at til løsning av oppgaver vil vi benytte oss av de teoremer som fremkommer ut fra de morfologsike undersøkelsene. Vi trekker ikke inn teoemer utenfor dette området til for å finne en løsning. I begynnelsen av oppgavene vil vi likevel benytte de elementære sirkelkonstruksjoner som å finner normaler, parallelle linjer og annet før disse fremkommer som teoremer. Etterhvert vil vi imidlertid se at også disse enkle konstruksjonene fremkommer ut fra temaet.

Den andre begrensningen gjelder valg av oppgaver. Vi vil i alminnelighet ikke skissere oppgaver ut av det blå. På den ene siden vil det være enkle klassiske oppgaver som er oversiktlig som vi også utvider til mer generelle bilder. På den annen side vil oppgavene være av en slik art at vi kan virkelliggjøre de ulike bildene som fremtrer.

13.1 Desargues setning og parallellitet

Når vi ikke har metrikk begrunnes parallellitet i forhold til gitt parallellitet. Er to parallelle linjer gitt, kan vi finne paralleller til denne, og er to par parallell linjer gitt kan vi finne parallelle linjer til alle linjer.

13. *Gitt to parallelle linjer, og et punkt utenfor disse. Finn en parallell til linjene gjennom punktet.*

14. *Gitt to par parallelle linjer, og en enkelt linje som ikke er parallell med disse. Finn en parallell til denne linjen.*

15. *Gitt to par parallelle linjer, en enkelt linje som ikke er parallell med disse og et punkt som ikke ligger på noen av linjene. Finn en parallell til den enkle linjen gjennom punktet.*

Et annet moment ved Desargues setning er at hvert punkt kan være perspektivpunkt. Hvert nytt punkt vi velger gir to nye trekanter, og en ny Desargueslinje.

16. *Gitt en Descarteskonfigurasjon. Ta utgangspunkt i et annet punkt som perspektivpunkt, finne de perspektiviske trekantene, og desargueslinjen. Dette kan gjentas med andre punkter.*

13.2 Pascals setning

Ved anvendelse av Pascals setning kan vi konstruere en del grunnleggende elementer. Det første er at når vi har gitt fem punkter på et kjeglesnitt, kan vi finne så mange nye vi vil.

17. *Gitt fem punkter på et kjeglsnitt. Finn et nytt punkt på kjeglesnittet.*

18. *Gitt et kjeglsnitt ved fem punkter, og en linje gjennom et av punktene. Finn denne linjens andre skjæringspunkt med kjeglesnittet.*

19. *Gitt et kjeglesnitt gjennom fem punkter, og en linje gjennom to av disse. Gjennom et av de andre skjæringspunktene trekker vi en parallell til linjen. Finn linjens andre skjærignspunkt med kjeglesnittet.*

20. *Gitt et kjeglesnitt ved fem punkter. Finn en diameter til kjeglesnittet.*

21. *Gitt et kjeglesnitt ved fem punkter. Finn senteret til kjeglesnittet.*

22. *Gitt et kjeglsnitt ved fem punkter. Finn en tangent i det ene punktet.*

23. *Gitt en pascalkonfigurasjon med gitt punktrekkefølge (1,2,3,4,5,6) og finn pascallinjen. Permuter deretter syklisk de tre første punktene slik av vi får punktrekkefølgene (3,1,2,4,5,6) og (2,3,1,4,5,6). Finn Pascallinjene også her. Hva fremkommer?*

13.3 Lokus

Den første type konstruksjon vi har å gjøre med er dannelse av kurver. Fra Pascals setning har vi at vi kan finne så mange puntker vi vil når fem er gitt. Når dette er på plass, kan vi anse å ha funne et kjeglesnitt når vi har en punktlokus.

13.4 Brianchons setning

Ved Brianchons setning kan vi konstruere de duale bildene til Pascal. Parabelen blir imildertid spesielle her, fordi den tangerer linjen i uendelig, noe som gir flere oppgaver.

24. *Gitt fire tangenter til en parabel. Finn en femte tangent.*

25. *Gitt fire tangenter til en parabel. Finne en linje parallell med aksen.*

26. *Gitt et kjeglensitt og en linje utenfor dette. Finn en diameter parallell til kjeglesnittet.*

27. *Gitt et kjeglensitt ved fem punkter. Finn en diameter til kjegelsnittet parallell med en gitt linje.*

28. *Gitt en hyperbel ved de to asymptotene og en linje. Finn hyperbelens tangeringspunkt med linjen. Hvor ligger punktet i forhold til linjens skjæring med asymptotene?*

29. *En hyperbel er gitt ved de to asymptotene og en linje. Finn en annen tangent til hyperbelen.*

13.5 Persektivitet

Her ser vi på konstruksjonsmåter.

30. *Gitt en sirkel, og en diameter. En ellipse har samme akse, og vi har gitt et punkt på denne. Finn enda et punkt på ellipsen.*

31. *Gitt en sirkel, og en diameter. En ellipse har samme akse, og den tangerer en gitt linje. Finn tangeringspunktet mellom linjen og ellipsen.*

32. *Gitt to kjeglesnitt som skjærer hverandre i to punkter. Finn et fellespunkt for de to.*

33. *Gitt to kjeglesnitt som skjærer hverandre i fire punkter. Konstruer deres fire fellestangenter.*

34. *Gitt to kjeglesnitt som møtes i to punkter. Konstruer deres indre fellespunkt.*

35. *Gitt to kjeglesnitt i perspektiv som ikke skjærer hverandre. Konstruer deres perspektivlinjer.*

13.6 Tangering og skjæring

I mange av oppgaver innen kjeglesnittgeometrien er det et poeng å kunne konstruere skjærigspunkter og tangenter til kjeglesnitt når fem punkter eller fem linjer er gitt. I et geometriprogram kan vi jo finne kjeglesnittet gjennom de fem punktene, og deretter finnes kjæringspunktene. Her vil vi imidlertid se på hva som prinsipielt er mulig med sirkel og linjal. Når dette er gjort, kan man anvende de muligheter som ligger i de ulike verktøy.

36. *Gitt et kjeglesnitt gjennom fem punkter, og en linje gjennom to av disse. Gjennom et av de andre skjæringspunktene trekker vi en parallell til linjen. Finn linjens andre skjærignspunkt med kjeglesnittet.*

37. *Gitt tre punkter på et kjeglesnitt og en sirkel gjennom de tre punktene. Finn det fjerde skjæringspunktet mellom sirkelen og kjeglesnittet.*

38. *Gitt et kjeglesnitt ved fem punkter og en linje. Finn skjærignspunktene mellom kjeglesnittet og linjen.*

39. *Gitt et kjeglesnitt ved fem punkter, og en sirkel gjennom to av punktene. Finn de andre skjæringspunktene mellom sirkelen og kjeglesnittet.*

13.7 Appolonisukonstruksjoner

En klasse konstruksjoner er de såklate appolonuiuskonstruksjoner. Her er oppgaven å konstruere sirkler som tanerer tre givne sirkler. Når sirklene kan anta sine ekstremverdier.

40. *Konstruer diagonalen mellom to sirkler som ikke skjærer hverandre.*

41. *En sirkel ligger inne i en annen. Konstruer diagonalen mellom dem.*

42. *Konstruer de ytre fellestangentene til to sirkler.*

43. *En sirkel ligger inne i en annen. Konstruer diagonalen mellom dem.*

44. *Konstruer diagonalen mellom to sirkler som ikke skjærer hverandre.*

45. *En sirkel ligger inne i en annen. Konstruer diagonalen mellom dem.*

46. *Konstruer fellespunktene mellom to sirkler som ikke skjærer hverandre.*

47. *Konstruer de ytre fellestangentene til to sirkler.*

48. *Finn den ytre felleslinjen til to sirkler.*

49. *Gitt to sirkler og et punkt på den ene sirkelen. Konstruer en sirkel som tangerer den ene sirkelen i puktet, og som også tangerer den andre.*

50. *Konstruer en av de indre felleslinjene til to sirkler.*

51. *Konstruer en sirkel som går gjennom tre gitte punkter.*

52. *Konstruer en av sirklene som tangerer tre gitte linjer.*

53. *Konstruer en av sirklene som går gjennom to givne punter, og tangerer en gitt linje.*

54. *Konstruer en av sirklene som tangerer to linjer, og går gjennom et gitt punkt.*

55. *Gitt en sirkel og to punkter. Finn sirklene som går gjennom punktene og tangerer sirkelen.*

56. *Gitt en sirkel og to linjer. Finn sirklene som tangerer linjene og sirkelen.*

13.8 Generelle konstruksjoner

Vi utvider her appoloniuskonstruksjoet til å gjelde generelt.

57. *Et kjeglesnitt går gjennom fire punkter, og tangerer en rett linje. Finn tangeringspunktet med linjen.*

58. *Et kjeglesnitt tangerer fire linjer, og går gjennom et gitt punkt. Finn tangenten i punktet.*

59. *Et kjeglesnitt går gjennom tre punkter, og tangerer to linjer. Finn tangeringspunktene med linjene.*

60. *Et kjeglesnitt tangerer tre linjer, og går gjennom to punkter. Finn tangenetene i punktene.*

61. *Gitt et kjeglesnitt og to punkter. Et kjeglesnitt går gjennom to gitte punkter på kjeglesnittet, gjennom de to punktene, og tangerer kjeglesnittet. Finn tangeringspunktet.*

62. *Gitt et kjeglesnitt og to linjer. Et kjeglesnitt tangerer linjene, tangerer kjeglesnittet, og går gjennom to punkter på periferien. Finn tangeringspunktet mellom de to kjeglesnittene.*

63. *Gitt et kjeglsnitt, to tangenter til dette, og to linjer. Et annet kjeglesnitt tangerer de fire linjene og kjeglsnittet. Finn tangerignspunktet mellom de to.*

13.9 Brennpunkt

Kjeglesnitt med gitt brennpunkt er dual til en sirkel. Vi kan derfor gjenfinne de elementære sirkelkonstruksjoner her, og også appolloniuskonstruksjonene. I disse oppgavene kan vi tenke oss kjeglesnittene gitt, slik at vi kan finne skjærignspunktene mellom disse og en linje umiddelbart.

64. *Gitt et kjeglsnitt. Finn brennpuktet til dette.*

65. *Finn styrelinjen til et gitt kjeglesnitt med et brennpunkt.*

66. *Gitt et kjeglesnitt ved dets ene brennpunkt, styrelinjen, og et punkt til på periferien. Finn enda et punkt på periferien.*

67. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt som ikke skjærer hverandre. Finn diagonalene mellom dem.*

68. *Gitt to kjeglesnitt med felles brennpunkt. Finn fellespuntket mellom disse.*

69. *Gitt et kjeglsnitt ved dets brennpunkt og tre punkter på periferien. Finn styrelinjen til kjeglesnittet.*

70. *Gitt et brennpunkt og tre linjer. Finn kjeglesnittet med dette brennpunktet som tangerer linjene.*

13.10 Dualitet

71. ***Tangenter fra punkt til kjeglesnitt***
Gitt et kjeglesnitt, og et punkt utenfor kjeglesnittet. Finn tangentene fra punktet til kjeglesnittet.

Vi trekker to linjer fra punktet over kjeglesnittet, og finner linjer gjennom skjæringspunktene. Disse møtes i to punkter på polaren, og der polaren skjærer kjeglesnittet har vi tangeringspunktene. Vi kan nå trekke tangentene.

72. *Vis setningen:*
Gitt en hyperbel og dens asymptoter, og to tangenter til hyperbelen. Skjøringspunktet mellom tangentene, senteret til hyperbelen, og skjøringspunktet mellom to paralleller med asymptotene gjennom skjæringspunkter med dem, vil liggge på samme linje.

73. ***Knekket korde***
Gitt en sirkel og tre punkter A, C og B på periferien, og linjerstyker AC og BC. Fra midtpunktet på buen mellom A og B feller vi en normal, og har punktet D der den treffer. Vis at avstandene langs linjene fra A til D, og fra B til D er like lange, selv om vi i det ene tilfellet har en brukket linje.

74. *Gitt et kjeglesnitt ved dets storakse og brennpunkter, og en tangent til kjeglesnittet. Finn punktet der tangenten berører kjeglesnittet.*

75. *Gitt en sirkel, og to punkter like langt fra senteret. Finn den korteste veien mellom punktene via sirkelperiferien.*

76. *Konstruer brennpuntet til en parabel som tangerer fire linjer.*

77. *En parabel er gitt ved brennpunkt og tre tangenter. Finn et av parabelens tangeringspunkter med tangentene.*

78. *Konstruer en parabel som tangerer fire linjer.*

Vi finner brennpunktet ved å finne skjærignspunktet mellom to sirkler som omskriver to trekanter. Vi kan finne nye linjer ved å legger sirkler som går gjennom brennpunktet og skjæringspunktet mellom to tangenter. De nye tangentene finnes mellom de andre skjæringspunktene. Punkter på tangentene finnes ved å la sirker tangere tangenter der andre skjærer .brennpunkt

79. *Konstruer en sirkel som tangerer et gitt kjeglesnitt og en gitt linje.*

80. *Konstruer en sirkel som tangerer et gitt kjeglesnitt og en går gjennom et gitt punkt inne i kjeglesnittet.*

81. *Gitt et kjeglesnitt og et punkt på aksen. Finn normalen fra punktet på kjeglesnittet.*

13.11 To brennpunkt

82. *Gitt et kjeglsnitt ved to brennpunktet og et punkt på periferien. Finn ved konstruksjon et nytt punkt på periferien.*

83. *Gitt to sirkler. En parabel tangerer begge disse. Konstruer et punkt på periferien til parabelen.*

13.12 Brennsirkel

84. *Gitt et kjeglesnitt og et punkt utenfor dette. Finn en sirkel som omslutter kjeglsnittet og går gjennom punktet.*

Gitt et kjeglesnitt og den loddrette aksen og et punkt på denne. Finn normalene fra punktet til kjeglsnittet.

85. *En hyperbel og dens asymptoter er gitt. Finn brennpunktene til hyperbelen.*

86. *Gitt et kjeglesnitt ved to brennpunkt og en linje. Finn tangeringspunktet med linjen.*

87. *Et kjeglsnitt er gitt ved et brennpunkt og tre tangenter. Finn kjeglsnittet ved å finne det andre brennpunktet.*

88. *Gitt et kjeglsnitt ved en sirkel, et brennpunkt og en linje. Finn tangeringspunktet mellom tangenten og kjeglesnittet.*

89. *Gitt et kjeglesnitt ved en sirkel et brennpunkt og et punkt i tillegg. Finn tangentene i punktet. Hvor mange løsninger har vi?*

90. *Gitt en sirkel og to punkter inne i sirkelen som er like langt fra periferien. Finn den raskeste veien fra det ene punktet til det andre via periferien.*

91. *Gitt en parabel, aksen og et punkt på denne. Finn normalene fra punktet på parabelen.*

92. *Gitt et kjeglesnitt ved en sirkel og tre linjer. Finn et brennpunkt til kjeglesnittet.*

13.13 Løsningsforslag

(22)Vi trekker en femstjerne mellom punktene, og der den ene diagonalen treffer linjen mellom to skjæringspunkter, trekker vi linjen til det femte punktet. Dette er en tangent.

(18) Vi anvender Pascals setning, og lar det søkte punkt være det sjette punkt i en Pascalkonfigurasjon. Vi finner Pascallinjen ved to par linjer, og det tredje Pascalpunktet finner vi der denne skjærer den gitte linjen. Når vi har dette puntet kan vi trekke den siste linjen i Pascalsekskanten, og vi finner det søkte punkt.

Kapittel 14

Bilder

Her er en systematisk gjennomgang av bildene.

14.1 Utgangspunktet

1. **Desargues setning**
Gitt to trekanter i perspektiv. Da vil samsvarende sider i trekanten møtes i tre punkter som alle ligger på en linje. Denne linjen kaller vi Desargues linje, og vi kan kalle perspektivpunktet Desargues punktet i konfigurasjonen.

2. **Desargues setning** Når to trekanter er punktperspektiviske, da er de også linjeperspektiviske.

3. Gitt to trekanter med hjørner på tre parallelle linjer. Da vil to og to samsvarende linjer i trekanten møtes i tre punkter på samme linje.

4. Når to par linjer i en sekskant innskrivet i en sirkel er parallelle, da vil også det tredje paret være det.

5. **Pasclas setning** Gitt en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil motstående sider i sekskanten møtes i tre punkter som alle ligger på samme linje.

6. Gitt to linjer, og tre punkter på hver av linjene. Vi danner kryss av linjer mellom mellom to og to punkter på hver linje, og krysningpunktene ligger på samme linje.

7. Gitt en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt, der to motstående sider er parallelle. Da vil Pascallinjen til bli parallell med disse linjene.

8. Når to par motstående sider i en sekskant innskrevet i et kjeglesnitt er parallelle, da vil også det tredje paret motstående sider være parallelle.

9. Gitt en femkant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil vi en tangent i et punkt, en linje i femkanten, og en linje gjennom to skjæringspunkter mellom de fire andre linjene, gå gjennom samme punkt.

10. **McLarens setning**
Gitt en firkant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil motstående sider, og motstående tangenter møtes i punkter som alle ligger på samme linje.

11. **McLarens andre setning**Gitt en firkant innskrevet i et kjeglesnitt, og tangenter i to nabopunkter i firkanten. Sider i firkanten og tangenter møtes i to punkter, linjen mellom tangeringspunktene og motstående side i et punkt, og disse punktene ligger på samme linjen.

12. Gitt en trekant innskrevet i et kjeglesnitt. Da vil en sidene i trekanten møte tangentene i motstående hjørner i tre punkter som ligger på samme linje.

13. Gitt en hyperbel og dens asymptoter, og to punkter på dens periferi på hver sin side av senteret. Gjennom punktene trekkes paralleller med asymptotene, og linjen gjennom disses skjæringspunkter vil da også gå gjennom senteret.

14. Gitt en hyperbel og dens asymptoter (a og b), og to punkter (P og Q) på periferien. Ene linje gjennom P parallell med den ene asymptoten, og en linje gjennom Q parallell med den andre, skjærer disse i to punkter, og linjen gjennom disse er da parallell med linjen PQ.

15. Gitt en ellipse, to tangenter til denne, og to punkter på periferien som slik at linjen gjennom disse er parallell med linjen gjennom tangeringspunktene. Vi trekker linjer mellom tangeringspunkter og punter på periferien, og der disse møter tangenten dannes punkter, og linjer gjennom disse er da parallell med linjen gjennom tangeringspunktene.

16. Gitt et kjeglesnitt, og to parallelle tangenter til denne. Fra to punkter på periferien til kjeglesnittet trekker vi linjer gjennom tangeringspunktene, og disse vil skjære hverandre i ytterligere to punkter. Linjen gjennom disse punktene er da parallell med tangentene.

17. Gitt en parabel, en tangent til denne, og to punkter på periferien. Fra punktene på periferien trekker vi linjer til tangeringspunktet, og linjer parallelle med parabelen. Disse møtes i to punkter, og linjen gjennom disse punktene er parallell med tangenten.

14.2 Dualitet

18. **Brianchons setning**
Gitt et kjeglesnitt og en sekskant som omskriver dette. De tre hovediagona-

lene i sekskanten vil da møtes i et og sammme punkt.

Brianchons setning fremtrer om mulig enda enklere i utrykket enn Pascals teorem, og mange forvandlignsmuligheter er også knyttet til denne, og vi skal se på noen av disse før vi senere ser på dualitetsprinsippet fra en annen kant.

19. Gitt et kjeglesnitt omskrevet av en femkant. Vi finner to diagonaler i femkanten. En linje gjennom det femte hjørnet i femkanten som går gjennom motstående tangeringspunkt, vil også gå gjennom skjærignspunktet mellom diagonalene.

20. **Dual Mclaren**

Gitt en kjeglesnitt, og en firkant som omskriver dette. En linje mellom to av tangeringspunktene vil da gå gjennom punktet der diagonalene i firkanten møtes.

21. Gitt en kjeglesnittm, og en firkant som omskriver dette. To linjer mellom tageringspunter og hjørner i firkanten, vil møtes på en diagonal i firkanten

22. Gitt en trekant, og et kjeglesitt innskrevet i dette. Linjene mellom hjørner i trekanten og tangeringspunktene, vil møtes i samme punkt.

23. Gitt en parabel, to tangenter til denne, og linjen mellom tangeringspunktene. Vi finner paralleller til tangentene som møtes på transversalen, og der disse møter tangentene trekker vi en linje. Denne er også en tangent til parabelen.

24. Gitt en hyperbel, asymptotene til denne, og to tangenter. Linjene gjennom punktene der tangentene møter asymptotene er da parallelle.

25. Gitt en parabel, tre tangenter til denne, og en diameter til parabelen gjennom et av tangeringspunktene mellom parabelen og en av tangentene. Der denne skjærer de andre linjene trekker vi paralleller til den tredje, og disse vil møtes på diameteren.

26. Gitt en pol og en polare. Vi lar en linje gå gjennom punktet. Polen til denne linjen ligger da på polaren til linjen.

27. Gitt et kjeglesnitt, et punkt, de to tangentene fra punktet til kjeglesnittet og polaren. Vi legger et punkt på polaren, trekker tangenter fra dette, og finner polaren. Denne vil da går gjennom det opprinnelige punktet.

28. Gitt et kjeglesnitt, et punkt utenfor kjeglesnittet, de to tangentene, og polaren til punktet. Vi trekker to linjer gjennom polen, og disse skjærer kjeglesnittet i fire punkter. Linjer gjennom disse punktene vil da møtes på polaren.

29. Gitt et kjeglesnitt, en linje som skjærer over dette, de to tangentene og polen til linjen. På polaren legger vi to punkter, og fra disse fire tangenter til kjeglesnittet. Tangentene danner fellespunkter, og linjer gjennom disse vil gå gjennom polen til linjen.

Register