

Was ist ein «Elektron»?

Versuch eines Zugangs zur Quantenphysik

Johannes Kühl

Zusammenfassung

Jeder Naturwissenschaftler geht heute selbstverständlich mit der Vorstellung von Elektronen als kleinen, negativ geladenen Teilchen um. Im vorliegenden Artikel wird die «Entdeckung» des Elektrons zunächst historisch nachgezeichnet. Daran anschliessend wird über die Spektren ein Zugang zur Quantenphysik, zur Schrödingergleichung und zu den stationären Zuständen beschrieben, der auch für Abiturienten verständlich sein sollte, und schliesslich wird die weitere Entwicklung der Quantenphysik angedeutet. Dadurch wird deutlich, wie wenig das einfache, gegenständliche Bild des Teilchens der Wirklichkeit entspricht, dass man aber dennoch anfänglich verstehen kann, um was es hier geht. – In einem zweiten Teil des Artikels soll der Inhalt des Begriffs «Elektron» mit dem Versuch eines goetheanistischen Zugangs genauer beschrieben werden.

Summary

Scientists are well used to deal with electrons picturing them as small negatively charged particles. In this article the “discovery” of the electron is described by looking at the historical steps up to the early quantum theory. The Schrödinger Equation is introduced in a simplified way with mathematics which should be accessible for upper school students thus showing that stationary states are “thinkable”. Finally the further development of quantum physics is sketched. Through this approach it becomes apparent that the simple picture of a particle is far from reality but that nevertheless it is possible to understand something about it. – In a second part of this work the content of the concept “electron” shall be described more detailed attempting a goetheanistic approach.

1. Einleitung

Obwohl die Quantenmechanik heute als eine der bestfundierten Theorien in der Physik gilt, dauert die Debatte über ihre Deutung bis heute an. D.h., bis heute ist man sich nicht darüber einig, was sie «bedeutet». Dies gilt insbesondere für die Wellenfunktion ψ in dem Sinne, dass man damit zwar das statistische Verhalten von «Quantenobjekten» wie z.B. Elektronen beschreiben kann, ohne aber sicher zu sein, ob und in welchem Sinne die Funktion selbst eine physikalische oder anschauliche Bedeutung hat¹.

¹ Zur Debatte s. z.B. *Baumann et. al.* (1984), *Sauer & Wüthrich* (2013), *Friebe et al.* (2015).

Bedeutende Physiker, darunter die Schöpfer der Quantenphysik, gingen so weit, in Frage zu stellen, ob sie überhaupt für Menschen zu verstehen sei.

Diese Situation ist offensichtlich eine besondere Herausforderung, zum einen für den Lehrer, aber auch für den «verstehen wollenden» Menschen und nicht zuletzt für die Steinersche Erkenntnistheorie. Kann es sein, dass es ein Gebiet gibt, das unverstänglich bleiben muss? Was heisst dann hier verstehen? – Im Folgenden soll versucht werden, durch die Untersuchung eines bestimmten Quantenobjekts, des Elektrons, zu erkunden, was heute in diesem Feld auf der Grundlage von Steiners Erkenntnislehre und des «Goetheanismus» gefunden werden kann.

Dafür wird in einem ersten Teil zunächst die Geschichte der «Entdeckung» des Elektrons, oder besser die Entwicklung des Konzepts «Elektron», betrachtet und untersucht, welche Phänomene und Phänomenfelder mit diesem Begriff verknüpft werden. Dann wird ein Weg zu einem prinzipiellen Verständnis der für die Quantenphysik und die Beschreibung des Elektrons zentralen Schrödinger-Gleichung beschrieben. Da es sich dabei um eine mathematische Theorie handelt, braucht man zu ihrem Verständnis auch Mathematik. Diese ist hier bewusst auf einem Niveau gehalten, welches 12. Klässlern oder Abiturienten zugänglich ist, so dass daraus die «Stabilität» des Atoms und seiner stationären Zustände verständlich wird. Es ist offensichtlich, dass dabei Fragen und Themen offen bleiben müssen.

In einem zweiten Teil des Artikels soll in einer Art Rückbesinnung das Ineinandewirken von Beobachtung und Experiment einerseits, Denken und Theorie andererseits bei diesem Weg angeschaut werden, um zu untersuchen, wie dadurch «Grenzvorstellungen» im Sinne Steiners entstehen (*Steiner 1917/1918*).

Dabei ist hier der Begriff «Theorie» durchaus nicht im abwertenden Sinne gemeint, wie bei dem Ausspruch: «das ist ja nur Theorie», sondern im Sinne der gedanklichen oder ideellen Seite der Erkenntnis. Manchmal wird «Goetheanismus» so verstanden, als ginge es da vor allem um sorgfältige Beobachtung in der Natur. Das scheint aber nur ein Teilaspekt zu sein. Ebenso wichtig ist das Erfassen der Gedanken und Ideen, die mit den Beobachtungen verbunden werden, und insbesondere zu beachten, wie und woran sie gebildet werden. Es kann nicht darum gehen, zunächst so zu tun, als ob man vorher nichts weiss, sondern gerade darum, das, was man bereits weiss, neu zu durchdringen. Goethe selbst schrieb im Vorwort zur Farbenlehre:

«Denn das bloss Anblicken einer Sache kann uns nicht fördern. Jedes Ansehen geht über in ein Betrachten, jedes Betrachten in ein Sinnen, jedes Sinnen in ein Verknüpfen, und so kann man sagen, dass wir schon bei jedem aufmerksamen Blick in die Welt theoretisieren. Dieses aber mit Bewusstsein, mit Selbsterkenntnis, mit Freiheit und, um uns eines gewagten Wortes zu bedienen, mit Ironie zu tun und vorzunehmen, eine solche Gewandtheit ist nötig, wenn die Abstraktion, vor der wir uns fürchten, unschädlich, und das Erkenntnisresultat, dass wir hoffen, recht lebendig und nützlich werden soll.»

(Goethe 1810)

Abschliessend soll betrachtet werden, welche Vorgänge man auf das Verhalten von Elektronen zurückführt, um daraus eine Übersicht, ein Bild zu erarbeiten, um was es sich hier handelt.

In diesem Sinne geht es also darum, einen Ausschnitt der Physik des 20. Jh. besser zu verstehen².

2. Zur Entwicklung des Konzepts «Elektron»

2.1. Das Elektron als Teilchen

Fragt man einen einigermaßen naturwissenschaftlich gebildeten Menschen, was ein Elektron sei, so wird er wahrscheinlich antworten: Ein sehr kleines, sehr leichtes elektrisch negativ geladenes Teilchen. Das ist Schulbuchwissen. Das Elektron lässt aber, nahezu 120 Jahre nach seiner «Entdeckung», auch für die konventionelle Physik viele Fragen offen: Unter dem Titel «The Enigmatic Electron» publizierte der renommierte Physiker Frank Wilczek einen Artikel, der mit folgenden Worten beginnt:

«What is an Electron? That question was central to the development of quantum theory early in the twentieth century, and remains at the frontier of physics today. There are several inconsistent answers, each correct. A century after danish physicist Niels Bohr conceived of the electron as the proton's satellite, our perception of the electron continues to evolve and expand.»

2 Damit steht dieser Artikel in einer Reihe ähnlicher Untersuchungen, wie sie zu verwandten Themen unternommen wurden, u.a. von Georg Unger (1967), Jos Verhulst (1994), Peter Gschwind (2004/2010), Thomas Schmidt (1996), Friedrich-Wilhelm Dustmann & Ulrich Pikall (1992), Friedrich-Wilhelm Dustmann (2012/2016) und Ulrich Wunderlin (2013).

und folgendermassen endet:

«So, what is an electron? An electron is a particle and a wave; is ideally simple and unimaginable complex; it is precisely understood and utterly mysterious; it is rigid and subject to creative disassembly. No single answer does justice to reality.»³

(Wilczek 2013)

Nun werden im folgenden nicht alle modernen Fragen um das Elektron behandelt, sondern es sollen zunächst die grundlegenden Beobachtungen und Gedanken beschrieben werden, die «die Physiker» von der Existenz von Elektronen überzeugt haben⁴.

2.2. «Strahlende Elektrizität»

Bereits in der Mitte des 19. Jh. war verschiedentlich die Vorstellung eines «Atoms der Elektrizität» aufgekommen, u.a. im Zusammenhang mit der Elektrolyse, wo durch das Faradaysche Gesetz ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der abgeschiedenen Stoffmenge und der dazu benötigten Menge der elektrischen Ladung festgestellt worden war. George J. Stoney schlug zusammen mit Hermann von Helmholtz den Namen «Elektron» dafür vor (Simonyi 1995).

In den folgenden Jahren untersuchten Emil Wiechert u.a. vor allem die Strahlungen, die bei hoher Spannung von den Elektroden in einer weitgehend evakuierten Röhre ausgehen. Bei den Experimenten zeigte sich ein grünliches Leuchten auf dem Glas, welches die Wirkung einer von der Kathode ausgehenden Strahlung zu sein schien: Ein Metallstück zwischen Kathode und Glas wirft einen Schatten (Schattenkreuzröhre). Neben dem Glas werden auch andere Materialien, wie z.B. Zinksulfid, zum Leuchten gebracht. Die Strahlung selbst allerdings ist nicht sichtbar. Bezüglich der – zunächst – geradlinigen Ausbreitung verhält sie sich ähnlich wie Licht. 1887 fand Wiechert, dass diese sog. Kathodenstrahlen von elektrischen und magnetischen Feldern so abgelenkt werden, dass man schliessen kann, dass sie negative Ladung tragen und eine gewisse Trägheit, also eine Masse besit-

3 Es gibt noch andere schöne Formulierungen zu diesem Problem. Don Lincoln beginnt seinen Artikel mit den Worten: «Winston Churchill once said of Russia that it was a riddle wrapped in mystery inside an enigma. Were the British Bulldog a physicist, he might have been talking [...] about an electron» (Lincoln 2016).

4 Eine ausgezeichnete philosophisch sorgfältige Analyse dieser Frage findet sich in Falkenburg (2007), Kap. 3. In dem Buch wird allgemeiner und an konkreten Beispielen die Frage behandelt, was man in der Physik heute als «Teilchen» versteht.

zen. Sie sind allerdings wesentlich leichter ablenkbar als «Materiestrahlung» wie z.B. die Kanalstrahlen, die von der Anode abgestossen werden und in einer solchen Röhre vom enthaltenen Restgas abhängen. Die elektrische und magnetische Ablenkung sowie die Masse gibt es bei Licht nicht.

Als eigentlicher Entdecker des Elektrons gilt der Engländer Joseph John Thomson, der seine Forschungen mit Kathodenstrahlen 1897 veröffentlichte (*Thomson 1897*). Er hatte festgestellt, dass die Eigenschaften der Strahlung unabhängig vom Restgas und unabhängig vom Material der Kathode sind. Aus der Messung der Ablenkung im magnetischen und elektrischen Feld folgerte er, dass die Strahlung eine Masse trägt und dass ausserdem das Verhältnis von Ladung zu Masse e/m immer gleich ist ($e/m \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$). Daraus schloss er, dass die Strahlung aus Teilchen besteht. Um das Verhältnis e/m zu berechnen muss man annehmen, dass negativ geladene Teilchen von der an der Kathode anliegenden Spannung auf eine Geschwindigkeit beschleunigt werden und dann im Magnetfeld durch die Lorentzkraft abgelenkt werden. Abb. 1 zeigt die von Thomson verwendete Kathodenröhre, Abb. 2 eine moderne Schulversion für das entsprechende Experiment.

Thomsons Überlegungen waren folgerichtig und sinnvoll, allerdings hatte er den Teilchencharakter, insofern er mit irgendeiner Unstetigkeit verknüpft ist, noch nicht gezeigt. Dennoch war das Bild der leichten, negativ geladenen Elektronen damit in den Vorstellungen verankert. Immerhin zeigten die

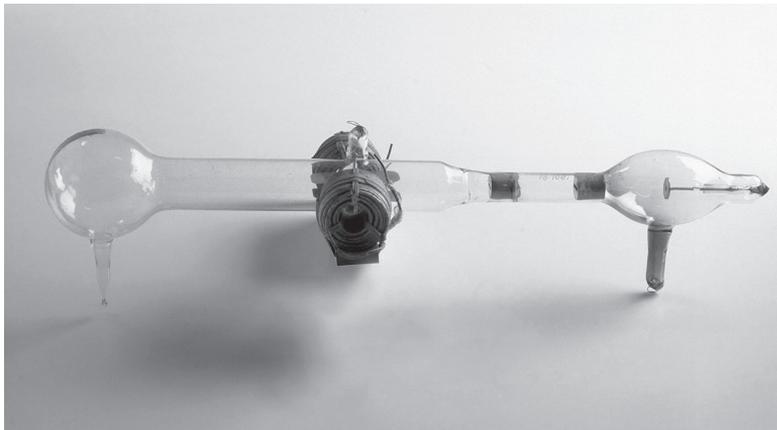


Abb. 1: Die von J.J. Thomson verwendete Kathodenstrahlröhre. Rechts befindet sich die Kathode, in der Mitte erkennt man die zur Strahlablenkung verwendeten Magnetspulen. (Science Museum London, Wikipedia)

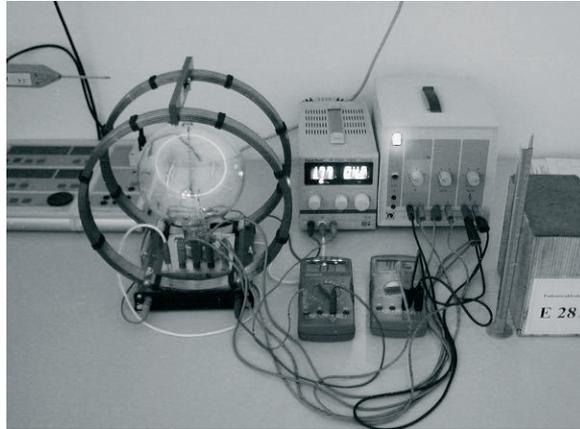


Abb. 2: Schulexperiment zur Bestimmung der spezifischen Ladung e/m des Elektrons: Aus dem Durchmesser des hell leuchtenden Kreises, dem Strom in den beiden grossen Spulen sowie ihrer Windungszahl und der Spannung an der Kathode kann der gesuchte Wert errechnet werden. (https://www.physik.uni-halle.de/im/1305645783_1479_0.jpg)

Strahlen in der 1895 von C.T.R. Wilson erfundenen Nebelkammer einzelne Tröpfchenspuren, ein Hinweis auf diskrete Teilchenbahnen (Abb. 3). Nach der Identifizierung der radioaktiven Beta-Strahlung mit den Elektronenstrahlen konnte man die beobachtbaren einzelnen Blitze bei der Bestrahlung eines Zinksulfid-Leuchtschirms auch als Hinweis auf die «Teilchennatur» deuten, wie auch später einzelne «Klicks» eines Geigerzählers.

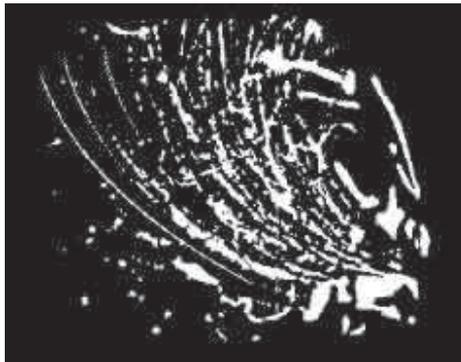


Abb. 3: Nebelkammeraufnahme von Beta-Strahlung. Die Tröpfchenspuren sind infolge eines Magnetfeldes senkrecht zur Abbildung gebogen, was ermöglicht, ihre elektrische Ladung zu bestimmen. (<https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-einfuehrung/ausblick/typische-nebelkammeraufnahmen>)

2.3. «Materiegebundene Elektrizität»

Die bereits erwähnte Beziehung zwischen abgeschiedener Stoffmenge und Ladungsmenge bei der Elektrolyse war ein erster Hinweis auf die enge Verbindung der beiden Grössen. – Schon früh hatte Thomson die von ihm in der Strahlung untersuchten Elektronen als «Bestandteil» des Atoms, also der Materie angesehen und auch versucht, damit chemische Bindungen zwischen Atomen zu erklären, obwohl zu jener Zeit die atomare Struktur noch nicht als gesichert angesehen werden konnte. Erste Ergebnisse bezüglich einer Unstetigkeit bei der elektrischen Ladung gelangen J.S. Townsend im gleichen Jahr 1897 durch Messung der Ionisation⁵ in der Nebelkammer⁶ in Thomsons Labor. Thomson selbst machte ähnliche Versuche. Eine genauere Messung gelang erst *Robert Millikan* (1911), als er die Bewegung elektrisch geladener Öltröpfchen im elektrischen Feld beobachtete und den Betrag ihrer Ladung bestimmte. Dabei stellte sich heraus, dass dieser Betrag immer gleich oder ein ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Ladung war, die als die Elementarladung

$$e \approx 1,6 * 10^{-19} C$$

bezeichnet wird (der Wert wurde selbstverständlich inzwischen wesentlich genauer bestimmt). Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, e wird heute als Naturkonstante angesehen.

Die Vorstellung vom Elektron als kleines Teilchen hatte allerdings bereits vor den Versuchen von Millikan usw. eine feste Stellung im Bild der Physiker. Zunächst stellte sich Thomson noch vor, dass in der Materie die Elektronen wie Rosinen in einem Kuchen verteilt seien, wobei er die Masse der Elektronen als so gross annahm, dass durch sie die Masse des

5 Ionisation bedeutet, dass eine Substanz elektrisch leitfähig bzw. punktuell elektrisch geladen wird.

6 Da die Nebelkammer in der Teilchenphysik eine so bedeutende Rolle spielt, sei hier erwähnt, dass Wilson zu den Versuchen angeregt wurde, als er die Höfe um die Sonne beobachtete. In seiner Nobelpreisrede 1927 berichtet er: «*In September 1894 I spent a few weeks in the Observatory which then existed on the summit of Ben Nevis, the highest of the Scottish hills. The wonderful optical phenomena shown when sun shone on the clouds surrounding the hill-top, and especially the coloured rings surrounding the sun (coronas) or surrounding the shadow cast by the hill-top or observer on mist or cloud (glories) greatly excited my interest and made me wish to imitate them in the laboratory. At the beginning of 1895 I made some experiments for this purpose – making clouds by expansion of moist air after the manner of Coulier and Aitken. Almost immediately I came across something which promised to be of more interest than the optical phenomena which I had intended to study. [...]*» (Schneider 2002)

Stoffes gegeben sei. Als dann sein Schüler Rutherford mit seinen Assistenten 1909 den berühmten «Goldfolienversuch» durchführte und daraus auf die «körnige Struktur» einer Metallfolie geschlossen wurde in der Art, dass nahezu alle Masse auf sehr kleinen Zentren positiver Ladung, den Atomkernen, konzentriert ist, da war es nur ein kleiner Schritt zu überlegen, wie die zugehörige negative Ladung in Form der Elektronen darum herum angeordnet sei. Hier setzte Niels Bohr an, als er 1913 seine Gedanken zum Atom als «Planetensystem im Kleinen» veröffentlichte und damit begann, die Linienspektren zu «erklären» (Bohr 1913). Dafür waren aber noch zwei weitere Entwicklungen von Bedeutung:

2.4. Linienspektren als «Quanten-Phänomen»

Sucht man nach einer Naturerscheinung, welche die Wellennatur der Quantenobjekte nahelegt, so kann man an Höfe oder Koronen denken, bei welchen periodische Farberscheinungen zu sehen sind. Von da ist es ein gerader Weg zu den verschiedenen Beugungsexperimenten am Licht und zur Bestimmung von Wellenlängen (s. z.B. Kühl 2011/2013a). Anders ist es bei der Teilchennatur, dort lässt sich wohl keine entsprechende Erscheinung finden, welche eine Art Unstetigkeit zeigt. – Man kann allerdings an einigermaßen einfache Experimente denken, die ein erstaunliches Phänomen zeigen, nämlich die Linienspektren.

Bereits 1802 hatte Wollaston dunkle Linien im Spektrum des Sonnenlichtes entdeckt. Unabhängig davon machte auch Joseph von Fraunhofer 1814 diese Entdeckung, bezeichnete die Linien mit Buchstaben und beschrieb sie sehr genau (Abb. 4).

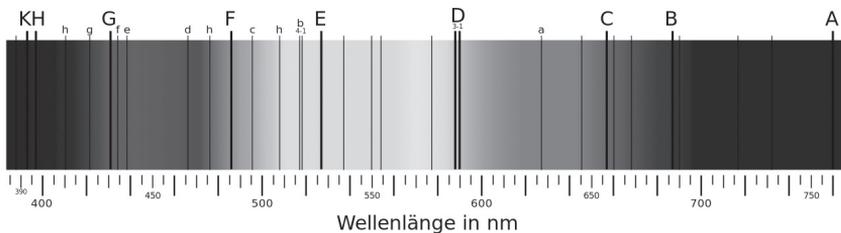


Abb. 4: Die Fraunhoferschen Linien: Dunkle Linien im Sonnenspektrum (Quelle: Wikipedia, Fraunhofer lines DE.svg)

Erst lange nach Fraunhofers Tod (1827) gelang es Gustav R. Kirchhoff und Robert Bunsen⁷ 1860 zu zeigen, dass farbig leuchtende Gase im Spektrum nur diskrete, einigermassen scharfe Linien zeigen, die typisch für das leuchtende Element sind. Bereits in ihrer ersten Veröffentlichung machten sie darauf aufmerksam, dass die Linien einiger Elemente mit Fraunhoferschen Linien zusammenfallen. So leuchtet bekanntlich etwa Natrium intensiv gelb, und seine gelbe Linie fällt mit der Fraunhoferschen D-Linie zusammen. Damit begann die Anwendung der Spektralanalyse in der Astronomie. Bereits in ihrer zweiten Veröffentlichung dazu konnten *Kirchhoff & Bunsen* (1861) die Entdeckung zweier neuer Elemente bekannt geben, Caesium und Rubidium. Abb. 5 zeigt die Spektren einiger Elemente.

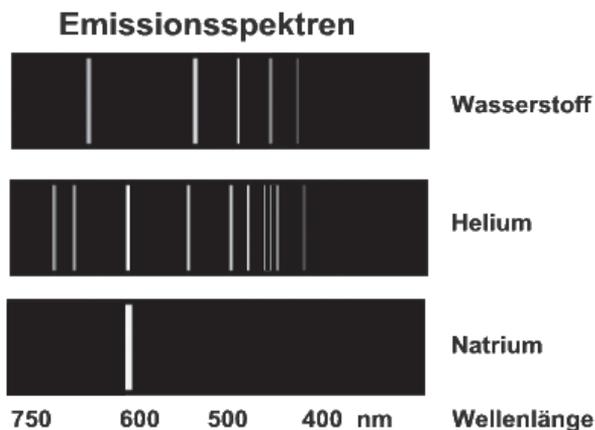


Abb. 5: Spektrum von Wasserstoff, Helium und Natrium (Quelle: <http://www.fornoff.homepage.t-online.de/Qastro/3Sonne/Spektrum.htm>)

Wie verschiedentlich beschrieben – z.B. in *Kühl* 2013b –, gelang es Johann J. Balmer 1885, die Wellenlängen λ des Wasserstoffspektrums mit einer einfachen Formel zu beschreiben, in welcher kleine ganze Zahlen $n > 2$ vorkommen (R ist eine zunächst experimentell bestimmte Konstante):

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1)$$

⁷ Nach ihm ist der Bunsenbrenner benannt, den er entwickelte, um eine möglichst farblose Gasflamme zu erzeugen, in welche die zu untersuchenden Substanzen gebracht werden konnten, ohne dass die Flammenfarbe das Spektrum störte.

Diese Formel wurde bald für einige andere Spektren erweitert, aber die besonders bemerkenswerte Ganzzahligkeit blieb bestehen: Zum ersten Mal taucht hier auf, was man später und bis heute die Quantenzahlen nennt. Noch konnte man ihnen keine physikalische Bedeutung zumessen.

Die Linienspektren zeigen sich nur bei leuchtenden Gasen, glühende feste und flüssige Stoffe zeigen ein andersartiges oder kontinuierliches Spektrum, dessen Intensität von ihrer Oberfläche und dessen farbliche Helligkeitsverteilung von ihrer Temperatur abhängen. Je heisser ein Stoff glüht, desto intensiver wird der blaue gegenüber dem roten Bereich im Spektrum (daher spricht man von Weissglut).

In der zweiten Hälfte des 19. Jh. wurde das Spektrum glühender fester (schwarzer) Körper in Abhängigkeit von ihrer Temperatur sehr genau vermessen. Beim Versuch, diese Spektren aus einem Modell vieler Schwingungen von Oszillatoren oder Atomen zu berechnen, sah sich Max Planck im Jahr 1900 gezwungen, die abgestrahlte Energie in frequenzabhängigen Portionen in die Gleichungen einzufügen:

$$E = h \cdot \nu \quad (2)$$

Dabei ist h die nach Planck benannte Konstante, ν die Frequenz der Strahlung. Das bedeutet: Wenn man nur eine abgestrahlte Frequenz ν (Farbe) betrachtet, dann wird die Energie nur in gleich grossen Portionen $h\nu$ abgestrahlt.

Eine ähnliche Beziehung wurde von *Einstein* (1905) verwendet und erfolgreich auf die theoretische Beschreibung des photoelektrischen Effekts angewendet. Wichtig an der Arbeit Einsteins war, dass er gewissermassen ausprobierte, das Licht selbst (oder elektromagnetische Strahlung überhaupt, also auch Röntgenstrahlung) als Teilchen vorzustellen. Gegen diese Konsequenz hatte sich Planck noch gesträubt, die Wellentheorie des Lichtes war für ihn zu überzeugend, als dass er sie auch nur teilweise aufgeben konnte. Die Teilchen wurden später Photonen genannt⁸. – Zunächst schien dieser Zugang ziemlich hypothetisch, zumal man zu jener Zeit keine einzelnen Photonenergebnisse nachweisen konnte. Er bekam allerdings 1923 eine wichtige experimentelle Bestätigung durch den Compton-Effekt, bei welchem A.H. Compton Röntgenstrahlen auf Graphit lenkte und die Energiedifferenz der einfallenden und gestreuten Strahlung als Ergebnis elastischer Stösse zwischen Elektronen und Photonen deuten konnte⁹.

8 Die Entwicklung dieser Vorstellung und der damit verbundenen Schwierigkeiten wird z.B. beschrieben in *Meyn* (2013) sowie in *Falkenburg* (2007).

9 *Compton* (1923) s. entsprechende Physikbücher, z.B. *Bader* (1972).

2.5. Niels Bohr, Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger: Der Weg zur Wellenfunktion

Entscheidend für Bohrs Ansatz war, dass er die Plancksche Beziehung (2) mit den Linienspektren, also der Balmerschen Beziehung (1), und der Elektronen- und Atomvorstellung verknüpfte: Er dachte sich bekanntlich das Atom aufgebaut aus einem massereichen, sehr kleinen, positiv geladenen Kern, wobei die Ladung des Kerns je nach Element verschieden ist, was bereits aus den Goldfolienversuchen – die nicht nur mit Gold gemacht wurden – hervorging. Darum herum stellte er sich die Elektronen kreisend vor wie die Planeten um die Sonne, wobei an die Stelle der Massenanziehung die elektrische Anziehung tritt¹⁰. Dazu führte er allerdings bestimmte Einschränkungen oder Postulate ein, die den Gesetzen der bisherigen Physik widersprachen:

- i) Anstelle von unendlich vielen Bahnen um den Kern sind nur bestimmte Bahnen erlaubt, die durch die Plancksche Konstante h festgelegt werden¹¹.
- ii) Diese Bahnen sind stabil, d.h. entgegen den Gesetzen der Elektrodynamik sendet die kreisende und damit beschleunigte Ladung keine Strahlung aus (sog. stationäre Zustände).
- iii) «Springt» ein Elektron von einer Bahn auf eine andere, wird die Energiedifferenz (im einfachsten Fall gerade $E = h \nu$) als Licht ausgesendet. Wie dieser Sprung vonstatten geht, bleibt offen («Quantensprung»). Diese Energie wird als Spektrallinie beobachtet.

Mit diesen Postulaten gelang es Bohr, das Linienspektrum leuchtenden Wasserstoffgases mit Übergängen der Elektronen zwischen den Bahnen zu erklären und die Konstante R aus der Theorie quantitativ zu bestimmen – ein grossartiges Ergebnis! (vgl. Kühl 2013b)

Soweit brauchte man an der klassischen Teilchen-Vorstellung des Elektrons nicht zu rütteln. Während man für ein Verständnis der Lichtphänomene anscheinend die merkwürdige Doppelnatur Welle/Teilchen brauchte, die ja Bohr auch beide verwendete (die Balmer-Formel enthält λ , die Energiedifferenzen ganze Zahlen n und die Grösse $h\nu$), blieb im Bohrschen Modell das Elektron «normales» Teilchen. Aber die Postulate waren schlicht unverständlich: Wie kann es stabile, stationäre Bahnen geben, warum fällt

10 Bohr (1913). Für eine ausführlichere Darstellung der Bohrschen Gedanken und weitere Literatur s. Kühl (2013b).

11 Die Bedingung ist, dass der Bahndrehimpuls L ein ganzzahliges Vielfaches der Konstante ist: $2\pi L = nh$.

das Elektron nicht einfach in den Kern? Ausserdem gelang es mit diesem Konzept nur teilweise oder gar nicht, kompliziertere Spektren zu verstehen.

Die erste kühne Idee zur Lösung des Problems mit den Postulaten kam von dem Franzosen Louis de Broglie. Aus Überlegungen über eine Analogie zwischen Licht und Materie und in Anknüpfung an die Lichtquantenhypothese und die Relativitätstheorie entwickelte er in seiner Dissertation den Gedanken, dass Materie wie Licht auch eine Wellennatur habe. Aus den Beziehungen der Relativitätstheorie ergab sich eine Relation zwischen dem Impuls $p = mv$ eines Teilchens und der korrespondierenden Wellenlänge λ , wieder verknüpft durch die Plancksche Konstante h . Dies ist die nach ihm benannte de Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3)$$

Verknüpfte man diese Wellen mit den Bohrschen Elektronenbahnen, so ergaben sich umlaufende, kreisförmige, stehende Wellen, wie bei einer zu einem Kreis gebogenen Saite (Abb. 6). Die verschiedenen Bahnen unterschieden sich dann durch die Anzahl der Wellen:

Weder gab es zu jener Zeit eine experimentelle Bestätigung für solche Wellen, noch passten sie zu der klassischen Teilchen-Vorstellung. Dennoch warf die Idee ein Licht auf das Bohrsche Modell¹². Erst 1927 gelang Davisson

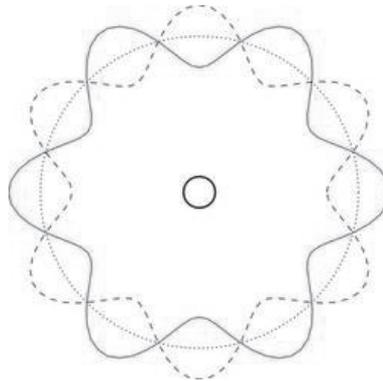


Abb. 6: Kreisförmige stehende Wellen

¹² Die Idee erschien damals so kühn, dass der Prüfungsausschuss der Sorbonne unsicher war, ob er die Dissertation akzeptieren sollte. Sie wurde an Einstein geschickt, der sich tief beeindruckt zeigte (lt. Wikipedia, Artikel über de Broglie, abgerufen September 2016). Schliesslich akzeptierte der Ausschuss die Dissertation, für welche de Broglie dann 1929 den Nobelpreis erhielt.

und Germer ein Experiment, in welchem sie Beugungserscheinungen, also eine Welleneigenschaft, mit Elektronen zeigen konnten. Dabei lenkten sie einen Elektronenstrahl (Kathodenstrahl) durch eine dünne Metall- oder Graphitscheibe und konnten auf dem gegenüberliegenden Schirm Beugungsringe beobachten (*Davisson & Germer 1927*), s. Abb. 7. Diese entsprechen etwa den Höfen, wie man sie um Sonne oder Mond sehen kann (Abb. 8). Dabei bestätigte die aus den Ringdurchmessern errechnete Wellenlänge der Elektronen im Zusammenhang mit dem aus der Beschleunigungsspannung ermittelten Impuls die de Brogliesche Beziehung (3)! Zum ersten Mal war experimentell von bis dahin mehr oder weniger als «vernünftig» angesehenen «Teilchen» die Welleneigenschaft nachgewiesen! Das Elektron war also sicher nicht als ein «normales», klassisches Teilchen anzusehen. Man kann ähnliche Experimente auch mit einem Doppelspalt ähnlich wie das berühmte Experiment von Thomas Young am Licht ausführen und erhält die entsprechenden Phänomene.

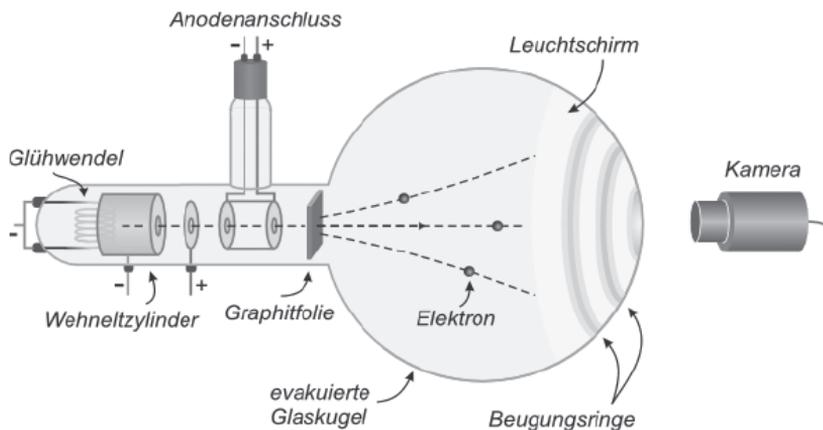


Abb. 7: Schematischer Aufbau eines Experiments zur Elektronenbeugung (<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1569>)

Etwa gleichzeitig mit de Broglie wagte Werner Heisenberg während eines denkwürdigen Helgoland-Aufenthalts im Juni 1925 einen radikalen Neuanfang, indem er Modellbilder wie Teilchenbahnen und Umlaufzeiten aufgab und eine Theorie entwickelte, in welcher nur «beobachtbare Größen» vorkommen sollten, d.h. die messbaren Wellenlängen und damit Energien



Abb. 8: Hof um die Sonne (Foto: Eva Seidenfaden) und Beugungsringe eines Elektronenstrahls (<https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1569>)

der Spektrallinien und ihre Intensitäten. Sie wurden verknüpft in Analogie zur klassischen Hamiltonschen Mechanik, in welcher Energie und Impuls massgebend sind. Diese sog. Heisenbergsche Matrizenmechanik übersteigt allerdings den mathematischen Rahmen dieses Textes.

Die Arbeit Heisenbergs mit der darauf folgenden Ausarbeitung zusammen mit Max Born und Pascual Jordan 1926 bildeten einen radikalen Durchbruch zur neuen Quantenmechanik¹³. In grundlegender Weise wurde hier die naiv-realistische Vorstellung «kleiner Teilchen», wie sie im 19. Jh. üblich war, überwunden. Es wurden Gedankenformen entwickelt, die dem «untersinnlichen» Gebiet der Atom- und Kernphysik angemessen waren. So kann man sagen: Einerseits wurde der naive Realismus mit seiner strengen Kausalität überwunden, der das Universum im Grunde als eine grosse Maschine angesehen hatte, andererseits wurde die Tür aufgestossen zu Technologien, die in ihrem Vernichtungspotential alles bisherige in den Schatten stellen sollten¹⁴. Es ist beeindruckend, Heisenbergs eigene Beschreibung dieser Wochen auf Helgoland zu lesen (z.B. in *Heisenberg* 1969). Darüber hinaus ist es bewegend zu sehen, dass Heisenberg in engem Gespräch mit Kollegen arbeitete, insbesondere mit Niels Bohr, Max Born und Wolfgang Pauli, so dass aus dieser Zeit der Ausspruch von ihm stammt: Wissenschaft

13 Zur Biographie Werner Heisenbergs s. *Cassidy* (1995), die ersten Veröffentlichungen sind *Heisenberg* (1925) und *Born et. al.* (1926), verschiedene Nachdrucke.

14 Selbstverständlich gibt es Vorläufer zu diesem Schritt, s. z.B. die ausgezeichnete Darstellung in *Verhulst* (1994).

entsteht im Gespräch! Vor allem das Bohrsche Institut in Kopenhagen wurde in diesen Jahren zu einem Zentrum des wissenschaftlichen Austauschs und der wissenschaftlichen Diskussion. Die Berichte darüber sind zahlreich¹⁵.

Es wird erzählt (nach *Lincoln* 2016), dass der Holländische Physiker Peter Debye, als er von der Idee de Broglies hörte, die Bemerkung gemacht haben soll, dass, wenn die Elektronen Wellen wären, dann sollten sie auch mit einer Wellengleichung beschrieben werden. Diese Bemerkung habe den Österreichischen Physiker Erwin Schrödinger angeregt, eine solche zu entwickeln. Kurz nach Heisenbergs Publikation veröffentlichte er, anknüpfend an de Broglies Wellenvorstellung und in Modifikation der klassischen Hamiltonschen Mechanik eine Gleichung, die das Verhalten dieser Wellen beschreiben sollte, die nach ihm benannte Schrödinger-Gleichung. Sie bildet bis heute eine der Grundgleichungen der Quantenphysik. Wenig später gelang es zu zeigen, dass die Heisenbergsche Mechanik und die Schrödingersche Darstellung mathematisch äquivalent sind. In diesem Sinne sind die Arbeiten von de Broglie, Heisenberg und Kollegen sowie von Schrödinger eng miteinander verknüpft. Sie haben die neue Quantenmechanik und damit die Ansicht, was ein Elektron sei, im 20. Jh. entscheidend geprägt.

Was ist mit dieser Gleichung gewonnen? Sie ist eine Differentialgleichung, die es ermöglicht, Wellenfunktionen zu berechnen, die das Verhalten des Elektrons (und anderer Teilchen) beschreiben sollen. Aber wie? Es war Max Born, der 1926 den Charakter dieser Wellenfunktion, in der Regel mit dem Buchstaben ψ bezeichnet, erkannte: Ihr Quadrat, genauer ihr Betragsquadrat an einem bestimmten Ort lieferte die Wahrscheinlichkeit, an diesem Ort ein Elektron im Messgerät nachzuweisen¹⁶. Diese Deutung wurde dann in Bohrs Institut in Kopenhagen weiter ausgearbeitet, insbesondere von Bohr, Heisenberg und Pauli, deswegen spricht man von der Kopenhagener Deutung. Eine Konsequenz der statistischen Interpretation ist, dass man im Bereich der Mikrophysik auf den strengen Zusammenhang von Ursache und Wirkung verzichtet. Entscheidend bei dieser Deutung ist weiter, dass man nicht mehr von einem «unerkannt herumfliegenden» Elektron spricht, von dem man «leider» nur die Wahrscheinlichkeit kennt, an einem bestimmten Ort zu sein, sondern dass man von einem Teilchen erst sprechen kann, wenn man es im Messgerät (Geigerzähler, Nebelkammer usw.) nachweist. Davor ist es im naiv-realistischen Sinne nicht da, es ist nur der Möglichkeit nach vorhanden. Das stellt eine erhebliche Anforderung an die Begriffsbildung!

15 S. z.B. in *Heisenbergs* Beschreibungen (1969) und *Carl Friedrich von Weizsäckers* Aufsatz zu Bohrs 100. Geburtstag (1985).

16 Diese statistische Interpretation der Wellenfunktion ist vielfältig beschrieben, *Born* (1926) ist Borns erste Publikation dazu.

Dafür ermöglicht die Wellenfunktion z.B. die Berechnung stationärer Zustände und deren Energie, und die stimmen unter geeigneten Bedingungen gut mit den gemessenen Spektren überein. Solche Zustände entsprechen dem Grund- und den Obertönen einer schwingenden Saite, nur sind die Randbedingungen andere: Die Saite ist zwischen zwei festen Punkten eingespannt, die möglichen Zustände sind die möglichen ganzzahligen Wellen dazwischen, also z.B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der ganzen Länge usw. Die Randbedingungen, die durch den elektrisch anziehenden Atomkern gegeben sind, ergeben andere stehende Wellen. Aus der Rechnung folgen die aus den Chemie-Büchern bekannten z.T. hantelförmigen «Orbitale». Der Ausdruck ist irreführend, weil im Sinne der Kopenhagener Deutung keine Umlaufbahnen existieren. Auch von «Ladungswolken» zu sprechen trifft die Sache nicht, da es sich ja um Wahrscheinlichkeiten handelt. Man spricht gelegentlich von Aufenthaltswahrscheinlichkeit, eigentlich müsste man wohl sagen «Nachweis-Wahrscheinlichkeit», da im Sinne der Kopenhagener Deutung sich nichts irgendwo aufhält, sondern man erst von dem Teilchen sprechen kann, wenn es nachgewiesen wird.

Die Diskussion über dieses Ergebnis war heftig. So konnte sich bekanntlich Einstein nie damit anfreunden, hier fiel sein berühmter Ausspruch «Gott würfeln nicht!», seine Diskussionen mit Bohr sind legendär. Schilderungen darüber findet man z.B. bei *Heisenberg* (1969) und in den Schriften über Niels Bohr¹⁷. Es fiel verständlicherweise schwer, das naiv-realistische Bild eines Teilchens, welches «eigentlich» doch da ist, aufzugeben!

Experimentell waren es die Experimente zur Elektronenbeugung und -interferenz wie das von Davidson und Germer, die die Wellennatur bestätigten. Zunächst konnte man noch denken, dass die Elektronen «irgendwie» miteinander interferierten, aber das wurde später ausgeschlossen, als Experimente gelangen, bei denen man sicher war, dass sich – im klassischen Sinne – immer nur ein Elektron in der Apparatur befand und entsprechend auf dem Bildschirm (oder auf Fotoplatte oder Sensor) immer nur ein einzelnes Ereignis registriert wurde. Wartete man aber genügend lange, so dass sich nach und nach viele Ereignisse auf dem Schirm sammelten, so ergab sich daraus wieder das Interferenzmuster! Vergleichbare Experimente hat man auch mit Licht durchgeführt¹⁸. So hatte man auf der einen Seite die Einzelereignisse auf dem Schirm, auf der anderen das sich ergebende Interferenzmuster, welches nur mit der Wellenvorstellung verständlich war. Ganz

17 Dazu gibt es viel Literatur, s. z.B. *Pais* (1991), *Röseberg* (1992), *Weizsäcker* (1985), *Kühl* (2013b) u.a.

18 Auch dies ist vielfältig dargestellt, s. *Verhulst* (1994), *Feynman* (1985), *Greenstein & Zajonc* (1997) und Lehrbücher wie z.B. *Feynman* (1963).

offensichtlich hat man es nicht mehr mit realistischen Gegenständen zu tun! Stellt man sich das Elektron als entlang einer Bahn fliegendes Teilchen vor, dann mag das manche Experimente erklären, mit der Wirklichkeit hat es nichts zu tun. Niels Bohr hat diese Situation einmal folgendermassen auf den Punkt gebracht: «Those who are not shocked when they first come across quantum mechanics cannot possibly have understood it».

Insbesondere bleibt die Frage, was die Wellenfunktion bedeutet. Ist sie mehr als ein Hilfsmittel zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit des Ausgangs eines bestimmten Experiments? – Die Diskussion dazu unter Philosophen und Physikern dauert bis heute an, es wurden verschiedene Deutungen vorgeschlagen – meistens wird bis heute letztlich doch die Kopenhagener Deutung favorisiert¹⁹.

Selbstverständlich wurden die Quantenphysik und die Theorie des Elektrons und seiner Wechselwirkung mit Elektrizität in den folgenden Jahren weiterentwickelt. Einiges wird weiter unten skizziert. Auch die mathematischen Strukturen wurden tiefer untersucht, bis hin zur Quantenelektrodynamik, Quantenfeldtheorie und dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Das geht über das Anliegen dieses Artikels hinaus, eine (mathematikfreie) Beschreibung findet man in *Lincoln* (2016). Tiefer auf die Mathematik dieser Theorien eingehende Darstellungen unter Berücksichtigung der Erkenntnistheorie Steiners findet man insbesondere in den Arbeiten von *Peter Gschwind* (z.B. 2010).

Bevor wir der Frage nach der Natur des Elektrons weiter nachgehen, soll im folgenden Abschnitt versucht werden, ein Verständnis der stationären Zustände mit Hilfe der Schrödingergleichung zugänglich zu machen, wie man sie im Grunde seit Bohr in unterschiedlicher Weise im Atom vorstellt und berechnet. Der Abschnitt soll zeigen, dass der mathematische Aspekt, der für die Schlussfolgerungen wichtig ist, durchaus zugänglich und verständlich werden kann. Dabei wird versucht, die Mathematik auf dem Niveau zu halten, wie man es in einer 12. oder 13. Klasse behandeln kann.

3. Zum Verständnis der Schrödinger-Gleichung und der stationären Zustände

Es gibt verschiedene Ansätze, die Schrödinger-Gleichung auch für Schüler «plausibel» zu machen²⁰. Letztlich kann man sie nicht ableiten oder «bewei-

19 Zur Deutungsdebatte s. z.B. *Baumann et al.* (1984), *Sauer & Wüthrich* (2013), *Friebe et al.* (2015).

20 S. z.B. verschiedene Lehrbücher von Franz Bader, etwa *Bader* (1972), auch *Wunderlin* (2013).

sen», sie ist intuitiv gefunden worden und hat sich in der Behandlung vieler Probleme der Physik mit erstaunlicher Genauigkeit bewährt.

Zunächst sei die mathematische Behandlung von Schwingungen und Wellen betrachtet. Sie hat selbstverständlich zunächst nichts mit dem Elektron zu tun. Dann gilt es, das Prinzip einer Differentialgleichung zu verstehen, um dann die Schrödingergleichung zu betrachten.

3.1. Welle und stehende Welle

Die mathematische Beschreibung einer Schwingung, z.B. einer Feder mit der zeitabhängigen Auslenkung $a(t)$, der Amplitude A und der Schwingungsdauer T mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi / T$ geschieht durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion in folgender Weise²¹:

$$a(t) = A \sin(\omega t) \quad (4)$$

Zeichnet man den zeitlichen Verlauf auf, so erhält man bekanntlich folgende Kurve (Abb. 9):

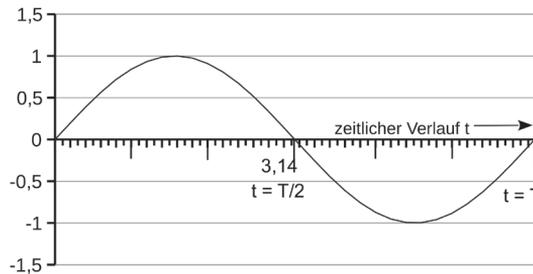


Abb. 9: Gewöhnliche Sinuskurve

Entsprechend kann man rein räumliche, nicht zeitabhängige Sinuskurven beschreiben mit der Wellenlänge λ , wobei es nützlich ist, die Wellenzahl k einzuführen mit $k = 2\pi / \lambda$:

$$a(x) = A \sin(kx) \quad (5)$$

Bei einer fortlaufenden Welle gilt, dass bei festgehaltener Zeit t eine einfache Sinuskurve entsteht, an einem bestimmten Ort x dagegen eine reine Sinus-

²¹ Falls die Schreibweise irritiert: Der Winkel 360° beträgt im sog. Bogenmass 2π , also wird das Argument ωt des Sinus nach der Zeit T gerade 2π oder 360° .

schwingung übrigbleibt. So kann man für die mathematische Beschreibung die beiden Argumente des Sinus kombinieren:

$$a_{+x}(t, x) = A \sin(\omega t + kx) \quad (6)$$

In diesem Fall bewegt sich die Welle in positiver x-Richtung mit der (Phasen-)Geschwindigkeit:

$$c = \lambda/T = \omega/k \quad (7)$$

Die Darstellung:

$$a_{-x}(t, x) = A \sin(\omega t - kx) \quad (8)$$

beschreibt eine Welle, die in negativer x-Richtung läuft.

Lässt man zwei gleiche Wellen in entgegengesetzter Richtung übereinander laufen, etwa indem eine Wasser- oder Schallwelle an einer zu ihrer Ausbreitungsrichtung senkrechten festen Wand reflektiert wird, so entsteht in der Regel eine stehende Welle, etwa wie die Schwingungen einer an beiden Seiten fest eingespannten Saite. Mathematisch lässt sich mit Hilfe der Additionstheoreme zeigen, dass für die Summe zweier einander entgegenlaufender Wellen gleicher Amplitude, Frequenz und Wellenlänge gilt²²:

$$\begin{aligned} a_s(t, x) &= A \sin(\omega t + kx) + A \sin(\omega t - kx) \\ &= 2A \cos(kx) * \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

Darin entspricht der Ausdruck $2A \cos(kx)$ der Amplitude, die jetzt abhängig von Ort x ist. An den Orten, wo der Kosinus 0 wird, befindet sich folglich ein Knoten der stehenden Welle, wo der Kosinus 1 wird, befindet sich ein Bauch. Der Ausdruck: $\sin(\omega t)$ beschreibt die Sinusschwingung am jeweiligen Ort.

3.2. Was ist eine Differentialgleichung?

Schüler kennen gewöhnlich Gleichungen, bei denen eine unbekannte Zahl gesucht wird, die die Gleichung erfüllt, z.B. für $15 = 2x+3$ ist die Gleichung mit $x = 6$ erfüllt. Mit einer Differentialgleichung wird nicht eine Zahl, sondern eine Funktion gesucht, die eine Gleichung erfüllt, in welcher eine

²² Die Herleitung findet man bei Bedarf in vielen Lehrbüchern.

oder verschiedene Ableitungen der Funktion vorkommen. Als verbreitetes Schulbeispiel sei die Schwingung einer Masse m an einer Feder gewählt.

Bekannt ist die Newtonsche Bewegungsgleichung (F : Kraft, m : Masse, a : Beschleunigung). Die Beschleunigung entspricht der zweiten Ableitung der Ortsfunktion $s(t)$ nach der Zeit:

$$F = m * a, \text{ mit } a = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

also:

$$F = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \tag{10}$$

Für die Kraft der Feder gilt in gewissen Grenzen, dass sie mit der Auslenkung s proportional zunimmt, also:

$$F = -Ds \tag{11}$$

Das Minuszeichen steht da, weil die Kraft in der entgegengesetzten Richtung zur Auslenkung wirkt. Wenn die Masse an der Feder frei schwingt, ist s eine Funktion der Zeit, also $s(t)$. Dabei wirkt nur die Federkraft, die mit Gl. (11) beschrieben ist, auf die Trägheit der Masse, die mit Gl. (10) beschrieben ist. Also kann man beide Gleichungen gleichsetzen:

$$-Ds(t) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \tag{12}$$

Dies ist eine Differentialgleichung: Statt wie bei einer gewöhnlichen Gleichung, wo eine Zahl x gesucht wird, mit der die Gleichung aufgeht, wird hier eine Funktion $s(t)$ gesucht, die die Gleichung erfüllt. Dabei sagt die Gleichung etwas aus über die Ableitungen der Funktion. Im Fall von Gl. (12) beschreibt dann die gesuchte Funktion die Bewegung der Masse m . – Es gibt verschiedene Methoden, eine solche Funktion zu finden, die alle eine gewisse Kenntnis von Funktionseigenschaften benötigen. In diesem Fall sucht man eine Funktion, deren zweite Ableitung sich von der Funktion selbst nur um einen konstanten Faktor unterscheidet. Das erfüllen z.B. die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion (und die Exponentialfunktion). So gilt z.B.:

Wenn: $s(t) = \sin\omega t$ dann folgt: $\frac{ds(t)}{dt} = \omega \cos\omega t$,

und weiter: $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\omega^2 \sin\omega t$ (13)

Diesen Ausdruck kann man nun in Gl. (3.8) einsetzen, und man erhält:

$$-D\sin\omega t = -m\omega^2\sin\omega t$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn gilt:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \text{ oder } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (14)$$

Mit ω ist dann die Kreisfrequenz des schwingenden Gebildes bestimmt. Erinnerung man sich, dass

$$\omega = \frac{(2\pi)}{T}, \text{ und die Frequenz } \nu = \frac{1}{T} \text{ also } \nu = \frac{\omega}{(2\pi)},$$

dann ergibt sich als Schwingungsfrequenz der Feder mit der Masse m :

$$\nu = \frac{1}{(2\pi)} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Das bedeutet, die Frequenz wird schneller, wenn die Feder härter ist (d.h. wenn D grösser ist), und langsamer, wenn die Masse grösser ist – wie es der Anschauung entspricht.

Damit ist ein einfaches Beispiel einer Differentialgleichung und ihrer Lösung beschrieben, welche zugleich Auskunft über die untersuchte Bewegung liefert. Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt, dass dies nicht die einzige Lösung dieser Differentialgleichung ist.

3.3. Wie kann man die Schrödinger-Gleichung verstehen?

Zunächst schreiben wir die Differentialgleichung Gl. (12) in anderer Form²³:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\frac{D}{m} s(t),$$

oder, mit Gl. (14):

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\omega^2 s(t)$$

23 Der folgende Gedankengang folgt z.T. der Darstellung in *Bader* (1972).

Eine entsprechende Gleichung kann man auch für eine räumliche, zeitunabhängige (d.h. stationäre) Funktion aufstellen, wir nennen sie $\psi(x)$, und setzen für ω entsprechend Gl. (5) die Wellenzahl k ein:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x), \text{ wobei } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

also:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 * \psi(x), \quad (15)$$

Soweit hat man im Prinzip nichts Neues. Jetzt kommen zwei entscheidende Schritte: Zuerst erinnert man sich an die Beziehung zwischen Wellen- und Teilchenaspekt nach de Broglie, s. Gl. (3):

$$\lambda = \frac{h}{p}, \text{ mit } p = m * v \text{ (Impuls = Masse * Geschwindigkeit)}$$

also:

$$v = \frac{h}{m * \lambda} \quad (16)$$

Damit führt man eine Beziehung zwischen Geschwindigkeit eines Teilchens und der Wellenlänge ein.

Als nächstes bedenkt man die allgemeine Beziehung, dass die Gesamtenergie eines Systems sich zusammensetzt aus der Summe von kinetischer und potentieller Energie:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

Dieser Ausdruck für die Gesamtenergie steht im Grunde hinter der Schrödingergleichung, wenn auch in anderer mathematischer Form (mit dem sog. Hamilton-Operator). Mit dem bekannten Ausdruck für die kinetische Energie erhält man:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m * v^2 + E_{pot}$$

und mit v^2 aus Gl. (16):

$$E_{tot} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} + E_{pot} \quad (17)$$

Jetzt kann man die Wellengleichung (15) leicht umformen, um einen Ausdruck mit λ und $\psi(x)$ zu erhalten:

$$-\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\psi(x)}{\lambda^2}$$

oder:

$$\psi(x) = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

Dies multipliziert mit der Gesamtenergie nach Gl. (17) ergibt:

$$E_{tot} * \psi(x) = -\frac{h^2}{8m\pi^2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + E_{pot}\psi(x) \quad (18)$$

Dies ist eine einfache Form der Schrödingergleichung, der von Debye geforderte Wellengleichung, die das Elektron beschreibt. Sie gilt in dieser Form nur für zeitunabhängige (stationäre) Zustände und ist nur eindimensional. Im folgenden sollen Wellenfunktionen $\psi(x)$ für eine bestimmte einfache Situation gesucht werden, die diese Gleichung erfüllen.

3.4. Lösung der Schrödingergleichung: Teilchen im «unendlichen Potentialtopf»

Dafür sei eine Situation mit sogenannten Randbedingungen betrachtet: Die potentielle Energie ausserhalb eines Bereiches sei unendlich, d.h. so gross, dass dort kein Teilchen eindringen kann. Der freie Bereich sei zwischen $x = 0$ und $x = L$. Dann besteht die Randbedingung, dass für $x < 0$ und $x > L$ die Wellenfunktion $\psi(x) = 0$ ist. Für den Bereich $0 \leq x \leq L$ sei die potentielle Energie Null. Für diesen Bereich wird also die Gleichung (18) zu:

$$E_{tot} * \psi(x) = -\frac{h^2}{8m\pi^2} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \quad (19)$$

sie hat die gleiche Struktur wie Gleichung (12), folglich sind Lösungen wieder die Sinus-, Kosinus- oder Exponentialfunktion,

$$\psi(x) = \text{sinc}x$$

wobei c zunächst eine offene Konstante ist. Die Randbedingungen fordern:

i)
$$\psi(0) = \sin(c * 0) = 0, \text{ und}$$

ii)
$$\psi(L) = \sin(c * L) = 0$$

i) ist sowieso erfüllt. ii) ist dann erfüllt, wenn das Argument des Sinus ein ganzzahliges Vielfaches von π ist, also: folgt:

$$c * L = n * \pi \text{ oder } c = n * \frac{\pi}{L}$$

mit $n = 1, 2, 3, 4$ etc. Damit sind die Funktionen $\psi_n(x)$ mögliche Lösungen der Schrödingergleichung, man nennt sie «Eigenfunktionen»:

$$\psi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Eine andere Gruppe von Eigenfunktionen entsteht durch Umkehren des Vorzeichens von x , analog zu den Überlegungen zu stehenden Wellen in Kap. 3.1. Überlagern wir beide, so erhalten wir auch hier stehende Wellen.

Nun setzen wir diese Lösung in die Schrödingergleichung ein, um die Energiewerte zu berechnen. Für $0 \leq x \leq L$ lautet die Schrödingergleichung (18) dann

$$\text{(mit: } \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \text{):}$$

$$E_{tot} * \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{h^2}{8m\pi^2} \frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x + 0$$

oder,

$$\left(E_{tot} - \frac{h^2}{8m\pi^2} \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi}{L} x = 0 \quad (20)$$

Da der Sinus nicht für alle x Null ist, muss auf der linken Seite in (20) die Klammer Null sein. Das ergibt:

$$E_{tot} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass bereits in diesem einfachen Fall die Gesamtenergie des Systems nur diskrete Werte (sog. Eigenwerte mit jeweils $n = 1, 2, 3$ etc.) annehmen kann, die Energiezustände sind «gequantelt». Das entspricht den Bohrschen Zuständen («Bahnen», die keine sind) im Wasserstoffatom, nur dass dort die Quantelung anders aussieht, da die potentielle Energie um den Kern nicht Null ist, was die Rechnung wesentlich komplizierter macht. Wenn das System von einem Zustand in den anderen springt, dann wird die Energiedifferenz ausgestrahlt (oder absorbiert), sie entspricht dann der Energie der Spektrallinien. – Entsprechend kann man für andere Atome oder sogar Moleküle die Energiezustände berechnen, wenn man das zugehörige Potential für die potentielle Energie kennt.

Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis erhält man, wenn man $n = 0$ einsetzt: Dann verschwindet die ganze Funktion

$$\psi_0(x) = \sin \frac{0\pi}{L} x = 0$$

D.h. aber nichts anderes, als dass kein Teilchen in diesem Zustand vorkommt! Auf das Wasserstoffatom übertragen bedeutet das, dass das «Elektron» nicht in den Kern fallen kann! – Ein weiterer Hinweis darauf, dass die klassische Vorstellung eines Teilchens die Wirklichkeit nicht trifft.

4. Folgerungen und weitere Entwicklung

4.1. Folgerungen

Eine der wichtigsten Folgerungen der Quantenmechanik ist die Heisenbergsche Unschärferelation. In einem mehr heuristischen Sinne, also nicht im Sinne einer streng mathematischen Ableitung, folgt sie aus der Beschreibung eines Teilchens mit der Wellenfunktion. So hat Bohr sie auch in seiner berühmten «Como-Lecture»²⁴ erläutert, und so beschreibt sie auch Heisenberg in seinem frühen Buch «Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie» (Heisenberg 1930). Auch *Verhulst* (1994) macht davon immer wieder Gebrauch.

Der Inhalt der Unschärferelation enthält zwei Aussagen: Zum einen: Je genauer man von einem Teilchen den Ort kennt, desto weniger kann man

24 Nach *Falkenburg* (2007), *Bohr* (1928).

über seinen Impuls $p = m \cdot v$ aussagen und umgekehrt. Zum anderen: Je genauer man den Energie-Zustand eines Teilchens kennt, desto weniger weiss man, wie lange der entsprechende Zustand eingenommen wird und umgekehrt. Als Formel geschrieben (wobei h wieder die Plancksche Konstante, der griechische Buchstabe Δ die Grösse der Unschärfe bedeuten):

$$\Delta x * \Delta p \geq h \quad (21)$$

und:

$$\Delta E * \Delta t \geq h \quad (22)$$

Wäre das Produkt grösser oder gleich Null, so könnten jeweils beide Unschärfen beliebig klein werden, so aber bedeutet es, dass eine grösser werden muss, wenn die andere kleiner wird.

Zum anfänglichen Verständnis stelle man sich vor, ein Elektronenstrahl treffe senkrecht auf einen Spalt der Breite Δx . Dann ist seine Geschwindigkeit und damit sein Impuls in x-Richtung (parallel zur Spaltebene) Null, also scharf bestimmt, folglich ist auch $\Delta p_x = 0$. Die Ortsunschärfe entspricht der Spaltbreite Δx . Ist der Spalt hinreichend gross, so wird man auf dem gegenüberliegenden Schirm einfach ein helles Bild des Spaltes sehen. Wird der Spalt aber enger, d.h. Δx kleiner, so gibt es wegen der Welleneigenschaft der Elektronen immer stärkere Beugungserscheinungen, das Spaltbild auf dem Schirm wird breiter und periodisch gegliedert. Das bedeutet aber, dass die Elektronen auch eine Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung erhalten, so dass Δp_x nicht mehr Null ist. Je enger der Spalt, also je kleiner Δx , desto grösser wird Δp_x . – Heisenberg gibt eine Reihe solcher Beispiele an (1930). Ähnlich kann man auch die zweite Unschärferelation begründen. – Eine Konsequenz der Ort-Impuls-Unschärfe ist, dass ein Elektron nicht in den Atomkern fallen kann, was bereits oben aus der Schrödingergleichung gefolgert wurde: Seine Ortsunschärfe wäre dann nahezu beliebig klein!

Eine weitere wichtige Merkwürdigkeit sei erwähnt: Bisher wurden nur zeitunabhängige, also stationäre Situationen betrachtet. Stellt man eine zeitabhängige Schrödingergleichung auf, so wird man zwangsläufig auf eine Gleichung mit komplexen Grössen geführt, also mit imaginären Anteilen ($i^2 = -1$). Auch die Wellenfunktion wird dann komplex. Dazu kann man sich bekanntlich nichts mehr vorstellen! Mit anderen Worten: Die Theorie führt von selbst in einen ausser- oder untersinnlichen Bereich, welcher der gegenständlichen Vorstellung entzogen ist.

4.2. Zur weiteren Entwicklung

Die Entwicklungen der Jahre 1923–26 bedeuteten einen entscheidenden Durchbruch für die Quantenphysik. In den folgenden Jahren wurde das Erreichte vertieft und erweitert. Es übersteigt den Rahmen dieses Textes, dies grundsätzlich zu schildern, daher seien nur einige Ergebnisse gestreift:

Die Schrödinger-Gleichung war nicht relativistisch, d.h. sie berücksichtigte nicht die Effekte, die nach der speziellen Relativitätstheorie bei hohen Geschwindigkeiten auftreten. Dies wurde zunächst 1926 durch Oskar Klein und Walter Gordon für Vorgänge behandelt, bei denen keine magnetischen Effekte auftreten, also z.B. Licht (Klein-Gordon-Gleichung).

Wolfgang Pauli modifizierte 1927 die Schrödinger-Gleichung so, dass auch magnetische Effekte berücksichtigt wurden, allerdings noch nicht-relativistisch. Das führte zu einem neuen Aspekt des Elektrons: Schon aus dem Stern-Gerlach-Versuch (1922) musste man folgern, dass das Elektron, damals noch als Teilchen betrachtet, einen Eigendrehimpuls hat, als würde es sich um sich selbst drehen, den sogenannten Spin. Damit verbunden ist ein magnetisches Moment. Allerdings gibt es Widersprüche zu dieser anschaulichen Vorstellung. Der Versuch zeigte, dass es nur zwei mögliche Richtungen dafür gab. Das folgte auch aus der Pauli-Gleichung. Vor allem aber ergab sich daraus eine statistische Eigenschaft: Wenn in einem System ein Teilchen dieser Art in einem bestimmten Zustand vorhanden ist, dann ist es unmöglich, im gleichen Zustand ein zweites Teilchen dort anzutreffen (Pauli-Dirac-Statistik). Dieses Ergebnis ermöglichte es, zum einen bestimmte Eigenschaften von Spektren der Stoffe besser zu verstehen, andererseits auch die kovalente Bindung bei Molekülen, bei der zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin trotz gleicher Ladung einen gemeinsamen Zustand einnehmen. Interessanterweise ist diese statistische Eigenschaft entgegengesetzt zu der von z.B. Photonen, bei denen die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Zustand weitere Teilchen ansammeln, mit der Anzahl der schon vorhandenen Teilchen steigt (Bose-Einstein-Statistik). Dies ist u.a. eine Grundlage für den Laser.

Wenig später gelang es dem Engländer Paul A.M. Dirac, eine Gleichung aufzustellen, die sowohl magnetische als auch relativistische Effekte berücksichtigt, die sog. Dirac-Gleichung. Zusätzlich zum Spin ergab sie eine erstaunliche neue Vorhersage, nämlich die Existenz von «Antimaterie»: Zu jedem Teilchen, also auch zum Elektron, sollte es ein entsprechendes Antiteilchen geben, das sich nur durch die Ladung unterscheidet. Kommen beide zusammen, so vernichten sie sich gegenseitig und ihre Masse wird als Strahlungsenergie frei. Das wäre also eine vollständige Umsetzung von Masse in Energie entsprechend der berühmten Einsteinschen Gleichung $E = m c^2$! Die Vorhersage war erstaunlich, konnte aber 1933 von Anderson

mit der Entdeckung des Antiteilchens zum Elektron, des sog. Positrons, bestätigt werden. Treffen ein Elektron und ein Positron zusammen, so gibt es einen «Gammablitz» mit der Energie 511keV ($\lambda \approx 0,0024\text{nm}$), entsprechend der Ruheenergie der Teilchen (genauer: zwei Photonen mit je etwa dieser Energie, abhängig von verschiedenen Modifikationen). Umgekehrt können aus energiereicher Röntgen- oder Gammastrahlung spontan ein Elektron und ein Positron entstehen. Damit ist eine bedeutende weitere Eigenschaft der Teilchen und damit der Materie benannt: sie kann «erzeugt» und «vernichtet», d.h. in Energie (Strahlung) verwandelt werden und umgekehrt. Von «Erhaltung der Masse» ist keine Rede mehr, sondern nur von der Erhaltung der Energie, in Form von Masse oder anders. – Heute weiss man, dass «Teilchen» in keiner Weise konstant sind, sondern in vielfältiger Weise umgewandelt werden können.²⁵

Mit der Dirac-Gleichung war ein vorläufiger Abschluss erreicht, das Verhalten und alle soweit bekannten Eigenschaften des Elektrons konnten damit behandelt werden, wenn auch die Mathematik so kompliziert ist, dass in den meisten Fällen Näherungsrechnungen nötig sind. Das gilt allerdings auch bereits für die Schrödingergleichung und viele andere Fälle in der Physik. Erst kurz nach dem 2. Weltkrieg entdeckten der amerikanische Physiker Willis Lamb und sein Doktorand Robert Retherford eine sehr schwache Energiedifferenz zwischen zwei Zuständen beim Wasserstoff, die man mit der Dirac-Gleichung zunächst nicht berechnen konnte. Energiedifferenzen zeigen sich im Experiment in der Regel in Spektrallinien; Lamb und Retherford verwendeten Mikrowellen von ca. 1000 Mhz, also weit ausserhalb des sichtbaren Spektrums. Diese Entdeckung gab Anlass zu einer weiteren Verfeinerung der theoretischen Überlegungen; die Quantenelektrodynamik und schliesslich die Quantenfeldtheorie wurden entwickelt.²⁶

Bis heute wird das Elektron auch in der Alltagssprache der Physiker als Teilchen behandelt. Das gibt Anlass zu einer weiteren Frage: Wie gross ist

25 Es ist interessant zu wissen, dass Dirac seine Gleichung ursprünglich auf der Grundlage von Überlegungen zur projektiven Geometrie entwickelte. Peter Gschwind hat daran angeknüpft und die Lösungen der Gleichung in einem Zusammenhang mit Steiners Erkenntnistheorie und seinen Bemerkungen über die Zahlenqualitäten neu interpretiert. R. Steiner sprach über positive, negative, imaginäre und überkomplexe Zahlen und setzte sie in Beziehung zum Physischen, Ätherischen, Astralischen und zum Ich (*Steiner* 1920). Gschwind und seine Kollegen konnten zeigen, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung Eigenschaften solcher überkomplexen Zahlen haben (*Gschwind* 2010).

26 Für eine Beschreibung dieser Entwicklung s. *Wilczek* (2013), für einen Eindruck von der Quantenelektrodynamik s. *Feynman* (1985).

es denn? Von Atomen und selbst Atomkernen kennt man aus Streuexperimenten die Ausdehnung – wie ist es bei Elektronen? Wenn es in der Theorie als Teilchen vorkommt, dann wird es als punktförmig betrachtet, aber das wiederum kann man sich schlecht vorstellen. Also hat man Experimente gemacht: Soweit man mit den heutigen (2016) Methoden messen kann, ist es auf jeden Fall kleiner als $2 \cdot 10^{-20}$ m! Und in diesem Bereich spielen nach der Theorie bereits neue Vorgänge eine Rolle, durch die die Frage nach der Grösse zunehmend sinnlos wird.²⁷

Wir haben es also demnach mit einem «punktförmigen Nicht-Ding» zu tun, welches manchmal als normaler Gegenstand behandelt werden kann, manchmal aber erscheint und verschwindet, und dessen Verhalten von ungewohnten Gesetzmässigkeiten bestimmt ist. Im zweiten Teil dieser Arbeit soll es um eine inhaltliche Beschreibung dieses «Nicht-Dings» gehen.

Literatur

- Bader, F.* (1972): Quantenphysik. Hannover.
- Baumann, K., Sexl, R.U.* (1984): Die Deutungen der Quantentheorie. Braunschweig.
- Bohr, N.* (1913): On the Constitution of Atoms and Molecules, Part I. Phil. Mag. 2626, S. 1–25.
- Bohr, N.* (1928): The Quantum Postulate and Recent Development of Atomic theory. Nature 121121, S. 580–590.
- Born, M., Jordan, P.* (1925): Zur Quantenmechanik. Z. Physik 34, S. 858 ff.
- Born, M., Heisenberg, W., Jordan, P.* (1926): Zur Quantenmechanik II. Z. Physik 35, S. 557 ff.
- Born, M.* (1926): Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge. Z. Physik 37, S. 863–867.
- Cassidy, D.C.* (1995): Werner Heisenberg: Leben und Werk. Heidelberg.
- Compton, A.H.* (1923): A quantum theory of scattering of X-rays by light elements. Phys. Rev. 2121, S. 483–502.
- Davison, C., Germer, L.H.* (1927): Diffraction of electrons by a crystal of nickel. Phys. Rev. 30, S. 705–740.
- Dustmann, F.-W.* (2012): Raumerfüllung und Materiefelder. Math.-Phys. Korr. 251, S. 3–9.
- Dustmann, F.-W.* (2016): Was ist Spin? Math.-Phys. Korr. 264, S. 3–19.

²⁷ Nach *Wilczek* (2013).

- Dustmann, F.-W., Pinkall, U.* (1992): Die Gleichungen der vier Ätherarten in Rudolf Steiners zweitem naturwissenschaftlichen Kurs. *Elemente d. N.* 56, S. 1–33.
- Einstein, A.* (1905): Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen d. Physik* 322, S. 132–148.
- Falkenburg, B.* (2007): *Particle Metaphysics*. Berlin, Heidelberg.
- Feynman, R.P., Leighton, R., Sands, M.* (1963): *Lectures on Physics*. Boston.
- Feynman, R.P.* (1985): *QED – The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton.
- Friebe, C. et al.* (2015): *Philosophie der Quantenphysik*. Berlin, Heidelberg.
- Greenstein, G., Zajonc, A.* (1997): *The Quantum Challenge*. Boston.
- Gschwind, P.* (2004): *Projektive Mikrophysik*. Dornach.
- Gschwind, P.* (2010): Was ist ein Teilchen. *Elemente d. N.* 93, S. 5–35.
- Heisenberg, W.* (1925): Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Z. Phys.* 33, S. 879–893.
- Heisenberg, W.* (1930): *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Mannheim.
- Heisenberg, W.* (1969): *Der Teil und das Ganze*. München.
- Kirchhoff, G., Bunsen, R.* (1861), Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. *Ann. Phys.* 189, S. 337–381.
- Kühl, J.* (2011): *Höfe, Regenbögen, Dämmerung – Die atmosphärischen Farben und Goethes Farbenlehre*. Stuttgart.
- Kühl, J.* (2013a): *Höfe, Regenbögen, Dämmerung – Naturerscheinungen als Zugang zu Beugung, Dispersion und Streuung*.
- Kühl, J.* (2013b): Niels Bohr – denken an der Grenze. *Die Drei* 12, S. 17–29.
- Lincoln, D.* (2016): The Nature of the Electron. *The Physics Teacher* 5454, S. 203–208.
- Meyn, J.-P.* (2013): Zur Geschichte des Photons. *PdN* 6161, S. 5–10.
- Millikan, R.A.* (1911): The isolation of an ion, a precision measurement of its charge and the correction of Stroke's law. *Phys. Rev.* 3232, S. 349–397.
- Pais, A.* (1991): *Niels Bohr's Times*. Oxford.
- Röseberg, U.* (1992): *Niels Bohr: Leben und Werk eines Atomphysikers*. Berlin, Heidelberg.
- Sauer, T., Wüthrich, A.* (Hg.) (2013): *New Vistas on Old Problems*. Berlin.
- Schmidt, Th.* (1996): Die Photonen der Physik, die Potenzlehre des Aristoteles und das «Imponderable» nach Rudolf Steiner. *Elemente d. N.* 65, S. 1–16.
- Schneider W.B.* (2002): *Die Glorie*.
- Simonyi, K.* (1995): *Kulturgeschichte der Physik*. Frankfurt.
- Steiner, R.* (1917): *Von Seelenrätseln*. 5. Auflage, Dornach 1983, GA 21.

- Steiner, R.* (1918): Frühere Geheimhaltung und jetzige Veröffentlichung übersinnlicher Erkenntnisse. 3. Auflage, Dornach 2014, GA 35.
- Steiner, R.* (1920): Zweiter Naturwissenschaftlicher Kurs. 2. Auflage, Dornach 1987.
- Thomson, J.J.* (1897): Cathode rays. *Phil. Mag.* 4444, S. 293–316.
- Unger, G.* (1967): Vom Bilden physikalischer Begriffe. Bd. III. Stuttgart.
- Verhulst, J.* (1994): Der Glanz von Kopenhagen. Stuttgart.
- Weizsäcker, C.F.* (1985): Niels Bohr. *Phys. Bl.* 4141, S. 308–314.
- Wilczek, F.* (2013): The Enigmatic Electron. *Nature* 498498, S. 31–32.
- Wunderlin, U.* (2013): Lehrbuch der Phänomenologischen Chemie. Band 3. Stuttgart.

Johannes Kühl
Forschungsinstitut am Goetheanum
Hügelweg 59
CH – 4143 Dornach
johannes.kuehl@goetheanum.ch